Philosophiæ Mathematicæ

NEWTONIANÆ

ILLUSTRATÆ.

TOMI DUO.

Quorum prior tradit Elementa Matheseως ad comprehendendam demonstrationem hujus Philosophiæ scitu necessaria:

Posterior continet 1) Definitiones & Leges motus generaliores; 2) Leges virium centripetarum & Theoriam attractionis seu gravitationis corporum in se mutuo; 3) Mundi Systema.

A GEORGIO PETRO DOMCKIO.

LONDINI:

Sumptibus THO. MEIGHAN, Bibliopolæ in vico *Drury-Lane*, & JER. BATLEY, sub Signo Columbæ, in vico *Pater-Noster-Row*.

MDCCXXX.

ILLUSTRISSIMO DOMINO

GUILIELMO,

Marchioni de Blandford, &c.

ILLUSTRISSIMI

Ducis de Marlborough,

Sacri ROMANI IMPERII PRINCIPIS,

Gentis GERMANORUM LIBERATORIS,

Immortali Rerum geſtarum memoria

INCLUTI,

PROGENIEI DIGNISSIMÆ,

Magno Muſarum MECÆNATI Præſidioque,

Primitias Laborum ſuorum

Submiſſo pectoris cultu

D. D. D.

G. P. DOMCKIUS.

PERLEGI hujusce libri quæ mihi visa sunt ad ferendum de eodem judicium necessaria: Et Authorem PHILOSOPHIAM NEWTONIANAM tum clare intellexisse, tum perspicue explicasse; quin & Elementa Mathematica, eidem Philosophiæ necessario præmittenda, breviter satis & feliciter exposuisse censeo

GUL. WHISTON
Matheseωs apud Cantabrigienses *Exprofessor Lucasianus.*

PRÆFATIO.

PHILOSOPHIAM, *quam illuſtrare in hocce opuſculo conatus ſum, nullis præconiis indigere omnibus conſtat, qui ei perſcrutandæ operam ſuam dextere navarunt. Ipſa inter ceteros ingeniorum fœtus præſtantia ſua tantum eminet,* quantum lenta ſolent inter viburna cupreſſi. *Quin etiam inanem ſholarum ſtrepitum præſentia ſua ſtatim compeſcit, & ludicras hypotheſium inſtar chartarum ſtructuras uno quaſi ictu convellit. Non enim verborum farragine deſidioſos paſcere, nec ſomniis & figmentis rerum naturam delineare, aut potius deformem reddere, Autor illuſtriſſimus ſtatuerat, ſed ipſius naturæ ducis veſtigiis inſiſten-*

do

do leges ejus æternas detegere, & divinæ mentis cogitationes penetrare. Quare laboris sui assidui ac recte instituti fructus opimos percipere, & posteris relinquere, alma Dei manus ipsi est largita. At non omnibus, ut ajunt, adire Corinthum hactenus licuit. Non enim ad captum omnium Autoris Principia Philosophiæ naturalis Mathematica sunt accommodata, sed eorum tantum, qui Matheseos *abstrusioris sunt periti; neque iis quidem ad sacra hæcce aditus est facilis. Nam quæ magno labore ab Autore parta erant, non sine labore alios iisdem frui placuit. Sed quoniam doctrinas illas, quæ ad ingenii cultum & ornamentum spectant, humanum genus nonnisi per otium & desidiam addiscere solet; hæ si nimis arduæ sunt, & nimio temporis & industriæ sumtu comparandæ, a plerisque negliguntur, & neglecta oblivioni traduntur. Laudanda igitur imprimis est* Gregorij, Whistonij, Keilij *ceterorumque industria, qui Autoris nostri præcepta explicare, & ad mediocris cujusvis ingenij captum eadem accommodare sategerunt. Sed cum & ipsi non exiguos Mathematum profectus in lectoribus suis supponant, mirum non est & eorum libros paucis fuisse perspicuos. Multorum enim, qui se Mathematum peritos esse opinantur, notitia non ultra* Euclidis *Elementa & Algebræ principia extenditur: quæ tamen quantum ad naturam curvarum, cui tanquam fundamento maxima pars hujus Philosophiæ superstructa est, comprehendendam sint manca, neminem sublimioris* Matheseos *studiosum latet. Quamobrem ne quid*

Lectori sedulo; licet Matheseos *hactenus ignaro, deesset eorum, quæ ad explicationem, quam proposueram, comprehendendam scitu sunt necessaria, ab ipsis Arithmetices principiis ordiendo, totam* Matheseos *doctrinam proposito meo adæquatam velut in compendio tradidi. En igitur, Lector benevole, non sumtuosa librorum suppellectile, non multorum annorum labore, non vasti voluminis meditatione tibi opus est, ad sublimem & abstrusam Autoris nostri Philosophiam intelligendam; sed in opusculo hocce exiguo, attenta menta & crebra repetitione pervestigando, labor & conatus omnis absolvitur. Tale est judicium Clar.* Whistonij *de hoc tractatu, quod pro candore & humanitate sua præfigere dignatus est. Imo & Clar.* J. Machinius, *rerum harum peritissimus, perlecta hujusce libri haud exigua parte ingenue declaravit,* se tironibus eundem perutilem censere, quibus notitiam Philosophiæ Newtonianæ adæquatam animus est acquirere, & quibus alia volumina in hunc finem pervolvere forte nimis molestum foret. Eundem enim, quantum ipsi videtur, continere omnes Matheseos propositiones, inde ab ipsis Arithmetices Elementis, quæ ad hocce propositum sunt necessariæ, methodo perspicua & naturæ rei adaptata.

At ne forsan meum esse, quod aliorum est, me velle quispiam existimet, præter Autores, quos passim in ipso libro commemoravi, quique inventorum suorum gloria inclaruerunt, in primis elucent Præstantissimus D. Edm. Hallejus, & *Ingeniosissimus*

mus Phil. de la Hire, *magnus uterque Geometra & Astronomiæ Lumen egregium. Illius doctrinam & canonem Logarithmorum exposui, hunc in sectionibus conicis explicandis magnam partem sum secutus. Ubi vero Geometrica demonstrandi methodus nimis longa limitesque compendii excedere videbatur, Algebraicam in subsidium vocavi: quæ variatio in hocce & aliis capitibus, ut opinor, lectorem delectabit potius, quam ipsi displicebit. Neque etiam silentio prætereundum est ingenium profundissimum* Rogerij Cotes, *cujus opera in curvarum natura indaganda olim haud exiguo mihi fuerunt adminiculo.*

Methodus Mathematica, quam in hoc volumine secutus sum, e rerum definitionibus ipsaque γενέσει, nec non e propositionibus sua luce claris, reliquas ab evidentia remotiores ac demonstrationis egentes deducit. Propositiones per se claræ Axiomata *dicuntur. Talia sunt: Totum æquari omnibus partibus simul sumtis; duas quantitates ad tertiam quamvis unam eandemque habentes rationem esse inter se æquales, &c. Axiomatibus in Philosophia naturali experimenta physica junguntur, quæ aut omnibus obvia, aut a peritioribus caute instituta nemo sanæ mentis in dubium vocare potest. Propositiones demonstrandæ aut aliquid affirmant, aut solvendum proponunt. Illud genus* Theorematum, *hocce* Problematum *nomen sortitur. Utriusque generis demonstrationes ex præmissis per se claris aut jam probatis depromuntur. Quicquid ex Theorematibus aut Problematibus immediate*

mediate concluditur Corollarium, *seu consectarium nuncupatur. Aliquando propositiones quædam ex alieno loco assumtæ Theorematibus aut Problematibus demonstrandis præmittuntur, quæ* Lemmata, *hoc est, assumta vocantur.* Scholia *denique annotationes continent, quibus præviæ definitiones aut propositiones quædam aut illustrantur, aut utilitates & autores earundem commendantur, aut alia quæcunque scitu necessaria commemorantur. Hisce nominibus Mathematici effata sua insigniunt, ut in demonstratione cujusvis asserti, cum lectorem ad præmissa referant, hic ipse primo statim intuitu videat, quantum se nosse opus habeat, aut si forsan quædam nesciat, quo ordine procedere debeat, ut de veritate propositionis convincatur. In parte priori Tomus primi, ubi demonstrationes admodum faciles & breves occurrunt, hisce nominibus lectorem facile supersedere posse censui; paragraphorum numeris hunc defectum compensantibus. Theoremata æque ac Problemata communi nomine* propositionum *appellavi, ut numerorum serie non interrupta facilius, ubi opus esset, inveniri possent. Multa in priori Tomo a scopo nostro aliena videntur, quæ tamen hic negligenda esse non existimavi, ut lectori plenius compendium & quasi nucleum Matheseos exhiberem, cujus ope non solum hunc tractatum, sed & alios Mathematicorum libros, si legere placeat, facili negotio intelligere valeret. In algebraicis expressionibus suo loco annotare prætermisi, ad errorem evitandum quantitates complexas linea vincitas esse, ubi aut signum radicis præ-*

fixum

fixum habent, aut in aliam quantitatem ductæ sunt. V. g. $\sqrt[2]{ax - xx}$ *significat radicem quadratam quantitatis complexæ* ax — xx, *&* $\overline{ax + xx} \times y$ *designat quantitatem complexam* ax + xx *ductam in* y. *Aliquando loco signi multiplicationis* × *substituitur punctum. Sic* $\frac{4.4u^6}{3.4.5.6r^3}$ *idem significat ac* $\frac{4 \times 4u^6}{3 \times 4 \times 5 \times 6r^3}$. Coroll. 3 *& seqq. quæ* Prop. 28. *insequuntur ex* Prop. 27. *& seqq. deducta sunt. Imprimis autem Autoris Scholium Lemmati decimo Libri* 1^mi^ *subjunctum sedulo lectori observatu necessarium iterum iterumque commendo, quod hocce est*: Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur inter se, & earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directe vel inverse: sensus est, quod prior augetur vel diminuitur in eadem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciproca. Et si earum aliqua dicatur esse ut suut aliæ duæ vel plures directe vel inverse: sensus est, quod prima augetur vel diminuitur in ratione, quæ componitur ex rationibus, in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut si *A* dicatur esse ut *B* directe, & *C* directe, & *D* inverse: sensus est, quod *A* augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$, hoc est, quod *A* & $\frac{BC}{D}$ sunt ad invicem in ratione data. *Aut ut alio exemplo rem illustrem, ubi errores*

motus

motus Satellitis lineares, in diversis planetæ primarii a sole distantiis, dicuntur esse ut cubus distantiæ a sole inverse & quadratum temporis periodici Satellitis circa primarium directe; sensus verborum hic est: errores motus satellitis lineares in distantia planetæ primarii a sole minori esse ad errores similes in distantia majore in ratione composita ex ratione cubi distantiæ majoris ad cubum distantiæ minoris, & ratione quadrati temporis periodici satellitis in distantia minori ad quadratum temporis periodici ejusdem satellitis in distantia majori.

Ceterum si finem hujus Philosophiæ præstantissimum consideras, qui est, ut divinis operibus penitius inspectis ipsam Divinæ Mentis virtutem, sapientiam & bonitatem deprehendas, ac pia mente colas eum, qui sceptrum universi tenet, qui legibus sempiternis iisque prudentissimis cuncta gubernat, qui siderum motus flectit, qui totam mundanæ fabricæ compagem vi gravitatis jungit, qui terrarum orbem diurno motu circumagit, eumque in orbita annua circumvolvit, ut diei & noctis, ut æstus & frigoris vicissitudo partus ejusdem perficiat, ac incolas nutriat resocilletque; qui maris æstus ciet, qui celerrimis lucis radiis velut penicillis cunctas res variis coloribus pingit, qui tremulo motu soni humanos animos percellit aut demulcet; huic divinæ doctrinæ te incubuisse nunquam pœnitebit. Atque utinam ævi nostri juvenes, quorum ætas viget, Creatoris sui memores opera ejus animadverterent, ipsique florem juventutis

tutis suæ puro pectoris cultu offerrent! Vos igitur, quos auri sacra fames, quos fastuosi honorum ambitus, quos voluptatum illecebræ, quos ludorum fraudes, quos deniq; ludicra pantomimorum spectacula non tantum abripuere, ut seriis hisce cogitatis tempus nullum supersit, macte animi, & tanti laboris fructus mecum percipite jucundissimos.

ANNOTATIONES

Observatu pernecessariæ.

IN definitione Quantitatis verba *magnitudinem determinatam per* omissa sunt, estque tota definitio hæcce : *Quantitas est magnitudo determinata per rerum ejusdem generis relationem ad invicem.* Ut, lineæ cujusvis Quantitas est magnitudo ejus determinata per relationem ad aliam quamvis lineam.

Locutio *minus nihilo*, quæ in demonstratione substractionis Algebraicæ occurrit, admodum impropria est, etsi à Mathematicis passim usitata. Quare ut melius & sine errore, quæ sentio, comprehendantur, sciendum est, quantitates negativas positivis esse contrarias, ideoque contrarias etiam habere affectiones. Igitur sicut quantitas positiva per substractionem negativa evadit ; ita vice versa quantitas negativa per substractionem in positivam convertitur : aut sicut diminuta possessione

debitum

debitum tantum augetur; ita vice versa diminuto debito possessio tantundem augescit.

Rationes proprie loquendo non sunt magnitudines, ideoque quantitatum affectiones iisdem non conveniunt: Quare si rationes majores aut minores esse dicuntur; sensus est, easdem esse rationes majorum aut minorum quantitatum relativarum; & rationes æquales potius cum *Euclide similes* dixerim, ut analogiæ seu proportionis expressio indicat.

In doctrina Logarithmorum Ratiuncula minus proprie mensura rationis esse dicitur, neque ipsa ratio tanquam quantitas infinito numero ratiuncularum æqualium composita est concipienda, etsi magnis quibusdam Geometris ita loqui placuit, sed potius tanquam ratiuncula una eademque infinitis vicibus repetita sive complicata. Quare Logarithmi sunt indices artificiales designantes quot vicibus una eademque ratiuncula in diversis rationibus est repetita sive complicata. Concipiatur differentia terminorum rationis 10 ad 1, quæ est 9, divisa in infinitum numerum particularum per x expressarum; erunt $1.\ 1+x.\ 1+2x.\ 1+3x.\ 1+4x$, &c. in continua proportione. Nam in proportione continua quo minor est differentia terminorum primæ rationis in relatione ad ipsos terminos, eo propius omnes differentiæ terminorum rationum insequentium ad æqualitatem accedunt. Quare ubi differentia prima est infinite parva & quasi evanescens, omnes differentiæ insequentes

quentes erunt & inter se & cum prima differentia æquales, per *Lemma* 1. *Part.* 2. *Tom.* II. Igitur ratio $1 + 2x$ ad 1 est duplicata rationis $1 + x$ ad 1. Et $1 + 3x$ est ejusdem triplicata. Jam si cujusvis alius rationis differentia terminorum in totidem particulas infinite parvas divisa concipiatur; erunt hæ particulæ diversæ a prioribus & magnitudines diversarum particularum erunt inter se, ut numeri infiniti complicationum diversarum unius ejusdemque ratiunculæ in diversis rationibus. Quare differentiolæ illæ sunt ut Logarithmi. Quodsi igitur ex numero quocunque extrahatur Radix infinitæ potentiæ; hæc Radix ad unitatem erit Ratiuncula, & differentia inter eandem radicem & unitatem Logarithmus rationis numeri ejusdem ad unitatem. Hisce observatis melius reliqua Logarithmorum doctrina intelligetur.

Index rerum totius Voluminis.

TOMUS I.

Pars prima agens de Arithmetica Universali.

Regulæ speciales.

Pars secunda agens de Geometria.

TOMUS II.

Pars prima continens

Pars

INDEX.

Pars secunda agens de viribus centripetis & attractione sive gravitatione corporum in se invicem.

Pars

Pars tertia agens de Systemate Mundi. Pag. 119

Philoſophiæ Mathematicæ

NEWTONIANÆ

ILLUSTRATÆ

TOMUS I.

INTRODUCTIO.

§. 1. Matheſis eſt Scientia agens de quantitatibus rerum.

§. 2. Quantitatis notio formatur per rerum relationem inter ſe, qua ipſas res inter ſe aut æquales, aut alias aliis majores aut minores, earumque magnitudinem aut parvitatem ſive certis limitibus circumſcriptam, ſive omnibus limitibus carentem concipimus. Quare quantitatem definire liceat eſſe rerum ejuſdem generis relationem ad invicem. Et ob hanc relationem res ipſæ, ut tempus, ſpacium, pondus, &c. vulgo quantitates vocantur.

§. 3. Quantitates certis limitibus circumscriptæ dicuntur finitæ, limitibus autem carentes infinitæ vocantur. Illæ aut augeri aut minui aut certo partium numero circumscribi; hæ nec augeri nec minui nec ullo partium numero definiri possunt.

§. 4. Numerum vocamus aut unitatem, aut unitatum plurium complexum, aut unitatis partem. Nimirum omnis notio, quam de quantitate habemus, oritur ex comparatione rerum inter sese; igitur ad definiendam aliquam quantitatem, aliam ejusdem generis instar mensuræ adhibemus. *E. g.* ad temporis spatium, quod hora vocatur, definiendum instar mensuræ minutum temporis adhibemus. Si igitur quantitas metienda suæ mensuræ æquatur, dicitur unitas sive unum; si eam bis, ter, quater, &c. continet, dicitur numerus binarius, ternarius, quaternarius, &c. sive duo, tres, quatuor, &c. omnesque hi numeri dicuntur toti: Si quantitatem metiendam sua mensura minorem deprehendimus, ipsam mensuram in certas partes divisam concipimus, & quot earum partium quantitati metiendæ competant videmus, atque hoc modo quantitas parte aut partibus mensuræ aliquotis determinata numerus fractus sive fractio appellatur.

§. 5. Quantitates in Mathesi aut certis characteribus, aut lineis & figuris exprimuntur. Characteres sunt vel numerici vel Algebraici. Characteres numerici ab omnibus Europæis recepti sunt sequentes 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. hoc est, nullitas, unum, duo, tres, quatuor, quinque, sex, septem, octo, novem. Et per horum

rum compoſitionem omnes reliqui numeri ſive toti ſive fracti exprimuntur. Nimirum ſi duo aut plures horum characterum conjunguntur, ille qui ad dextram primum locum obtinet ſuum valorem ſuperius attributum habet, qui vero ſecundum locum tenet, denarius eſt, qui tertium centenarius, qui quartum millenarius, qui quintum decies millenarius, qui ſextum centies millenarius, qui ſeptimum millio; eodemque modo in millionum claſſe ad ſiniſtram progrediendo quilibet character loco ſuo correſpondentem valorem habet. Millionum claſſem excipit claſſis billionum, hanc trillionum, hanc quadrillionum, & ſic deinceps.

E. g. 3,567,894,563,794. in hoc numero character 4 primo loco ad dextram ſtans valet quatuor, 9 qui ſecundum locum tenet eſt novies decem ſive nonaginta, 7 qui eſt tertio loco eſt ſepties centum ſive ſeptingenti, 3 in quarto loco eſt ter mille, 6 in quinto loco eſt ſexagies mille, 5 in ſexto loco eſt quingenties mille, 4 in ſeptimo loco eſt quatuor milliones, 9 in octavo eſt nonaginta milliones, &c. Totus igitur hic numerus ſequentem in modum enunciandus eſt: Tres billiones, quingenties ſexagies & ſepties mille octingenti & nonaginta quatuor milliones, quingenties ſexagies & ter mille, ſeptingenti & nonaginta quatuor. Et ad exprimendum numerum denarium, centenarium, millenarium, &c. ſolum, omnes locos præcedentes characteribus nullitatis o replemus, ita ut 20 ſit viginti, 400 quadringenti, 6000 ſexies mille, &c.

B 2 §. 6. Nu-

§. 6. Numerus fractus duplici modo exprimitur, primus hic est $\frac{3}{7}$, ubi numerus infra lineam positus, denominator dictus, indicat in quot partes totum divisum concipitur, & numerus supra lineam exponit, quot harum partium quantitas numerica continet: Quare numerus propositus significat tres septimas partes, sive septantes, unius.

§. 7. Alius modus exprimendi numerum fractum obtinet in fractionibus decimalibus, isque sequens est: 0. 3, 0. 04, 0. 007. &c. Dicimus nempe fractionem decimalem, ubi totum in decem, centum, mille, &c. partes divisum concipimus, igitur 0. 3 significat tres decimas, 0. 04 quatuor centesimas, 0. 007 septem millesimas, &c. in omnibus enim his fractionibus denominatores 10, 100, 1000, &c. subintelligimus, & nullitas quæ ad sinistram ponitur indicat defectum unius.

§. 8. Characteres Algebraici sunt litteræ Alphabethi, quas adhibemus ad quantitates sine certo & definito partium numero conceptas exprimendas. *E. g.* illam quantitatem temporis quam horam vocamus, si eam cum alia quantitate temporis comparamus, aut sub certo numero partium aut sine eo concipimus, & in hoc posteriori loco eam una Alphabethi litera exprimimus.

§. 9. Quantitates cognitas in sequentibus primis Alphabethi literis minusculis a, b, c, &c. incognitas ultimis, u, x, y, z, &c. indeterminatas mediis m, n, &c. exprimemus, totumque hunc Tomum in duas partes dirimemus, quarum prior Arithmeticam Universalem, altera Geometriam continebit.

PARS

PARS I.

AGENS DE

Arithmetica Univerſali.

§. 10. **A**Rithmetica Univerſalis eſt ſcientia quantitates incognitas ex cognitis ope certorum characterum indagandi. Characteres duplices quibus quantitates exprimuntur, nempe numericos & Algebraicos, in ſuperioribus expoſuimus, & jam de calculo eorum ſeparatim agemus.

De Additione Numerica.

§. 11. Per additionem numericam unitates unius aut plurium numerorum ad unitates alius aut aliorum numerorum addimus, & omnes unitates hoc modo in unum numerum aggregatæ ſumma ſive aggregatum ſive totum dicuntur. Operatio ipſa ſequentem in modum peragitur: 1) pone numeros addendos ita sub se invicem ut numeri primarii correspondeant numeris primariis in prima columna ad dextram, numeri denarii denariis in secunda, centenarii centenariis in tertia, &c. columna; 2) collige primum numeros primarios in unam summam, quæ si constat numero primario & denario, pone, lineola numeris addendis subducta, sub columnam primariorum numerum primarium & adde denarium numerum ad columnam sequentem denariorum, quibus itidem in unam summam collectis, si hæc componitur numero denario & centenario, pone denarium sub columnam denariorum, & centenarium adde columnæ centenariorum & sic deinceps; & evidens est omnes numeros primarios, denarios & centenarios ita in unam summam separatim collectos æquari summæ omnium numerorum secundum axioma: omnes partes totius simul sumtæ æquantur toti. En tibi exemplum,

	3789
	2406
	3785
	4389
Summa	14369

§. 12. Eodem modo in diversis speciebus monetarum, mensurarum & ponderum procedas, illud tantum observabis, ut cum tot unitates minoris speciei collegisti, quot unum speciei majoris continet, unum columnæ speciei majoris addas,

& reliquum ſub columnam minoris ſpeciei ponas. *E. g.*

	l.	*s.*	*d.*
	18	9	6
	4	8	7
	15	13	4
Summa	38	11	5

De Additione Algebraica.

§. 13. In hoc calculo quantitates poſitivas a quantitatibus negativis duobus ſignis diſtinguimus; nempe quantitatem poſitivam ſive realem ſigno + indicamus, quod dicitur ſignum plus; & quantitatem negativam ſive defectum quantitatis realis ſigno — exprimimus, quod dicitur ſignum minus. Quantitates ſine ſigno poſitæ ſunt reales, & ſignum plus ſubintelligitur. Quantitates æquales iiſdem literis exprimimus, quantitates inæquales diverſis.

§. 14. Si quantitates æquales ſunt ejuſdem generis, hoc eſt aut habent omnes ſignum plus aut omnes ſignum minus, eas tanquam unitates in unam ſummam colligimus & ſummæ idem ſignum præfigimus: Nam ſumma quantitatum realium eſt quantitas realis, & ſumma quantitatum negativarum eſt quantitas negativa, *e.g.* Si quis addit debitum alio debito ſumma non eſt niſi debitum.

EXEMPLUM 1.

$$\begin{array}{r} 1\,a+1\,b-1\,c \\ 2\,a+3\,b-1\,c \\ 3\,a+1\,b-2\,c \\ \hline \text{Summa } 6\,a+5\,b-4\,c. \end{array}$$

§. 15. Si quantitates iisdem literis expressæ sunt diversi generis minor à majori subtrahatur & residuo præfigatur signum majoris quantitatis. Nam si quantitati reali addis quantitatem negativam minorem, quantitas realis diminuitur, & vice versa; *e. g.* si possides centum libras & addis his æs alienum 10 librarum quas debes, possessio tua tantum diminuitur quantum debes, ita ut tibi remaneant 90 libræ.

EXEMPLUM 2.

$$\begin{array}{r} +3\,a-2\,b+3\,c \\ -2\,a+3\,b-4\,c \\ \hline \text{Summa } +1\,a+1\,b-1\,c \end{array}$$

§. 16. Si quantitates diversis literis sunt expressæ, omnes & singulas separatim cum signis suis in una linea pone.

EXEMPLUM 3.

$$\begin{array}{r} 2\,a+3\,b-2\,c \\ \text{adde } 3\,d-\,e+4\,f \\ \hline \text{Summa } 2\,a+3\,b-2\,c+3\,d-e+4\,f \end{array}$$

De

De Subtractione Numerica.

§. 17. Pone numerum ſubtrahentem ſub numerum ſubtrahendum eodem modo ut in additione, & lineola ſubducta aufer numerum ſubtrahentem primarium a numero ſubtrahendo primario, ſi potes, & reſiduum ſub lineam in eadem columna pone; ſin minus, minue numerum denarium ſubtrahendum uno, quod facit 10 unitates in columna primariorum, has 10 unitates numero primario ſubtrahendo adde, & a ſumma aufer ſubtrahentem, pone reſiduum ſub lineam; jam hoc unum, quod a numero denario abſtuliſti adde numero denario ſubtrahenti & hunc ſubtrahentem unitate auctum ſubtrahe a numero denario ſubtrahendo eodem modo quo in numeris primariis feciſti, & eodem modo progredere in centenariis, millenariis, &c. Operatione ita peracta habebis totum reſiduum, quia habes reſiduum omnium partium, nimirum primariorum, denariorum, centenariorum, &c. numerorum.

Exemplum.

3405684
1298453

Reſiduum 2107231

§. 18. Exemplum aliud pro diversis speciebus.

l.	*s.*	*d.*
15	8	7
7	14	8
Residuum 7	13	11

Hic quoniam octo denarios auferre nequis a septem denariis, mutuandus est tibi unus solidus, qui facit 12 denarios, quos addis 7 denariis, summa erit 19, & jam auferendo 8 de 19, tibi restant 11. Porro 14 solidos auctos unitate, hoc est 15, cum auferre nequeas ab 8 solidis, mutua unam libram, quæ facit 20 solidos, & hos adde 8 solidis, summa erit 28. Jam auferendo 15 de 28 restant 13. Denique 7 libras auctas unitate, hoc est 8, auferendo de 15 restant tibi 7.

De Subtractione Algebraica.

§. 19. In quantitate subtrahente substitue signa contraria, & eodem modo procede ut in additione.

Exemplum 1. Sit $a+2b$ subtrahendum à $2a+3b$, pone

$$2a+3b$$
$$-a-2b \text{ \& adde}$$

Residuum $a+1b$

Hic manifestum est quantitatem $a+2b$, quæ

subtra-

ſubtrahitur eſſe reſpiciendam tanquam quantitatem negativam.

Exemplum 2. Sit $-a$ ſubtrahendum à $+4a$, pone

$$\begin{array}{r} +4a \\ +\ a \end{array} \text{ \& adde}$$

Reſiduum $+5a$

Hic quoniam $-a$, quod eſt ſubtrahendum, eſt minus nihilo, non modo nihil ſubtrahere ſed & tantum addere debes, quanto $-a$ minus eſt nihilo. Aut ſi habes 100 libras proprias & 10 alienas, ſi aufers has decem libras alienas compenſando, habes 110 libras proprias.

Exemplum 3. Sit $+a$ ſubtrahendum de $a-3a$, pone

$$\begin{array}{r} a-3a \\ -\ a \end{array} \text{ \& adde}$$

Reſiduum $a-4a$

Nam quantitas realis ſubtrahenda qu[illegible]ntitas negativa evadit.

[illegible]narior [illegible]EMPLUM.

E[illegible]dem [illegible]o ſi $a-b+c$ ſit ſubtrahendum à $3a+e-$[illegible] pone.

$$\begin{array}{r} 3a+e-f \\ -a+b-c \end{array} \text{ \& adde}$$

Reſiduum $2a+e-f+b-c$.

De

De Multiplicatione Numerica.

§. 20. Multiplicare est quantitatem aliquoties ad seipsam addere, *e. g.* 6 per 3 multiplicare est 6 ad seipsum ter addere. Ad tædium hujus operationis per additionem evitandum sequens tabula est constructa, in qua prima series ad seipsam addita constituit secundam, hæc ad primam addita tertiam, hæc iterum ad primam addita quartam, & sic deinceps. Jam si primarii alicujus numeri, *e. g.* 5 per alium numerum primarium 4 multiplicati productum desideras, quære 5 in prima serie tabulæ, & descende in columna eadem usque ad eam seriem, quæ ad sinistram primum numerum 4 habet, & habebis in hac serie productum duorum numerorum datorum 20.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

N. B. Ea pars tabulæ quæ abſciſſa eſt ad dextram ſufficit: nam quære unum numerum multiplicandum 4 in prima ſerie & in ea ſerie quæ a Baſi hujus columnæ incipit progredere uſq; ad eam columnam, quæ in capite habet alterum numerum, *e. g.* 7, & habebis in hac columna productum 28.

§. 21. Hac tabula uti poteris donec producta numerorum primariorum memoria teneas. Jam ſi numerus compoſitus eſt multiplicandus per numerum ſimplicem aut compoſitum, operatio per partes peragenda eſt; *e. g.* ſi numerus 327 multiplicandus eſt per 34, multiplica primum 327 per 4, poſtea per 30. In prima operatione multiplica primum numerum primarium 7, deinde denarium

denarium 2, & deniq; centenarium 3 per 4, & eodem modo multiplica eosdem numeros sejunctim per 30, id est per denarium 3. Adde omnia hæc producta, & summa erit totum productum. En tibi operationem

327	Factores
34	
1308	
981	
11118	Productum sive Factum.

Dicis 7 quater sunt 28, ponis 8 & retines 2 numero denario addendos; deinde dicis bis 4 faciunt 8 & 2 faciunt 10, ponis 0 & retines 1 numero centenario addendum; deniq; dicis ter 4 faciunt 12 & 1 facit 13, quod totum ponis. Eodem modo procedis in multiplicatione numeri 327 per denarium 3, illud tantum observes, primum productum esse numerum denarium, igitur & in loco denariorum ponendum.

§. 22 Ita si 3 libræ, 7 solidi & 4 denarii multiplicanda sunt per 7, ita procede,

	l.	*s.*	*d.*
	3—	7—	4
			7
Productum	23—	11—	4

dicis 4 denarii septies faciunt 28, id est 2 solidos

& 4

& 4 denarios, ponis 4 denarios & retines 2 solidos; deinde dicis 7 solidi septies faciunt 49 & 2 faciunt 51, id est duas libras & 11 solidos, ponis 11 solidos & retines duas libras; deniq; dicis 3 libræ septies faciunt 21 & 2 faciunt 23.

De Multiplicatione Algebraica.

§. 23. In multiplicatione Algebraica literæ per se multiplicandæ aut hoc signo $\times$, aut sine ullo signo junguntur, & numeri per se invicem multiplicantur; *e. g.* $a \times b$ sive $a\,b$ est a multiplicatum per b, ita $12\ ab$ est productum ex $3a$ per $4b$. Si quantitas una eademq; semel aut aliquoties in seipsam ducitur, sive per seipsam multiplicatur, productum triplici modo exprimi potest, *e. g.* $a \times a$, sive $a a$, sive a^2 hoc est a multiplicatum per a; ita $a a \times a$, sive $a a a$, sive a^3 est $a a$ multiplicatum per a.

§. 24. Quantitas positiva multiplicata per quantitatem positivam producit quantitatem positivam, sic $+ a$ per $+ b$ facit $+ a b$.

§. 25. Quantitas negativa multiplicata per quantitatem positivam, aut positiva per negativam, producit quantitatem negativam. Nam quantitas negativa toties sumta, quoties quantitas positiva indicat, negativa; & quantitas positiva toties negative sumta, quoties quantitas negativa indicat, itidem negativa evadit; sic $+ a \times - b$ facit $- a b$. $3c \times - 4d$ facit $- 12cd$.

§. 26. Quantitas negativa multiplicata per quantitatem negativam producit quantitatem positivam

ſitivam, quod quî fieri poſſit ita concipe : ſi $a-b$ eſt multiplicandum per $-c$, multiplicas quantitatem poſitivam a per negativam c, quod producit $-ac$, ſed hoc productum negativum nimium eſt, nam debes multiplicare $-c$ per a minus b, igitur ſequens productum bc poſitivum evadit, ut nimium producti negativi compenſet. Ita ſi minus a eſt multiplicandum per $-b$, $-a$ idem eſt ac $o-a$: nam nullitas neq; auget neq; minuit quantitatem negativam a, & eſt tanquam terminus inter quantitatem poſitivam & negativam. Jam ergo o multiplicatum per $-b$ facit $-o$, quod nimium eſt, nam debes multiplicare $-b$ per $o-a$; ergo productum ſequens ab poſitivum evadit, ut compenſet nimium in producto negativo $-o$.

EXEMPLUM.

$$\begin{array}{r} 2a-3b+2e-d \\ 4c-e \\ \hline 8ac-12bc+8ce-4cd \\ -2ae+3be-2ee+de \end{array} \quad \text{Productum.}$$

Aliud.

$$\begin{array}{l} 3a^2-4b+c-2d \\ \qquad a+2c-d \\ \hline 3a^3-4ab+ac-2ad \\ +6a^2c-8bc+2cc-4cd \\ -3a^2d+4bd-cd+2dd \\ \hline \end{array}$$

Product. $3a^3+6a^2c-3a^2d-4ab+ac-2ad$
$-8bc+2cc+4bd-5cd+2dd.$

De

De Divisione Numerica.

§. 27. Dividere est totum in partes æquales dirimere: numerus qui partem aliquotam totius indicat, quotiens sive quotum dicitur. Sic 12 per 3 dividere est 12 in tres partes dividere; pars tertia numeri 12, quæ est 4 dicitur quotiens sive quotum. Jam si hunc numerum compositum 9747 dividere debes per 3, procede per partes, & sume primum partem tertiam de numero millenario 9, secundo de centenario 7, tertio de denario 4, & deniq; de primario 7, & habebis totum quotientem 3249.

§. 28. Si numerum compositum per alium numerum compositum dividere debes, *e. g.* 3746 per 32, pone divisorem ad sinistram numeri dividendi, & loco partis 32dæ de 37 sume partem tertiam de 3, sive trigesimam de 30, quæ est 1; deinde multiplica hunc quotientem per totum divisorem, quodsi productum dividendo aut est æquale aut proximum, quotiens suppositus est verus; jam productum 32 a dividendo 37 subtrahe, remanent 5, qui numero sequenti 4 juncti faciunt 54. Procede ut prius supponendo 32dam partem de 54 esse æqualem parti tertiæ de 5, quæ est 1; productum ex hoc quotiente in divisorem, quod est 32, subtrahe de 54, remanent 22, quibus junge ultimum dividendum 6, & habebis 226, de quibus 32dam partem eodem modo ut prius quæris: numerus 2 qui post subtractionem remanet est numerus fractus & significat 2 trigesimas secundas.

32)3746(117 $\frac{2}{32}$ Quotiens.
54
226

2

si productum ex quotiente supposito in divisorem numerum dividendum excedit, quotientem unitate aut pluribus minorem priori assume.

§. 29. Sint 218 libræ 7 solidi & 3 denarii dividendi per 6.

l. *s.* *d.*
6) 218 (36—7—10$\frac{1}{2}$
38

2
20

47 (7

5
12

63 (10
3

Hic dividendo 218 *L.* per 6 quotiens est 36 & remanent 2 libræ, quas reducis ad solidos multiplicando per 20 & addis 7 solidos, qui faciunt 47, quos dividendo per 6 quotiens est 7, & remanent 5 solidi, quos reducis ad denarios multiplicando per 12, & addis 3 denarios, qui faciunt 63, quos dividendo per 6 quotiens est 10 denarii, & remanent 3 qui faciunt $\frac{3}{6}$ sive $\frac{1}{2}$.

De

De Divisione Algebraica.

§. 30. In divisione Algebraica divide numeros per numeros si potes, & literam divisoris, si in dividendo continetur, omitte, *e. g.* $6\,ab$ divisum per $3\,a$ facit $2\,b$. Si a^4 est dividendum per a, numerum 4 qui index appellatur, ut postea docebimus, indice quantitatis a, qui est 1, minue, & erit a^3 quotiens: sic a^7 divisum per a^3 facit a^4. Si literæ divisoris a literis dividendi differunt, sub dividendum ducta lineola pone divisorem, sic $a\,b$ divisum per c facit $\frac{ab}{c}$. In signis quotienti præfigendis eædem regulæ, quæ in multiplicatione, valent.

ÆXEMPLUM.

$$2a+3e-4d)\,4ae-4ad+6ee-14ed+8dd\,(2e-2d$$
$$\begin{array}{rrrr} 4ae & & +6ee & -8ed \\ \hline 0 & -4ad & 0 & -6ed+8dd \\ & -4ad & & -6ed+8dd \\ \hline & 0 & & 0 \quad 0 \end{array}$$

Nam multiplicando divisorem per quotientem dividendus producitur; quodsi ergo in multiplicatione quantitas negativa multiplicata per positivam producit negativam, hæc negativa divisa per positivam producere debet negativam. Et si in multiplicatione quantitas positiva multiplicata per negativam producit etiam negativam, hæc negativa divisa per negativam producere debet positivam.

De Relatione sive Comparatione Quantitatum inter sese.

§. 31. Relatio unius quantitatis ad aliam dicitur ratio. Possunt autem quantitates duplici modo inter se comparari, nimirum 1) ut per subtractionem unius de altera videatur, quæ earum sit differentia, sive quanto una altera sit major aut minor; & hæc comparatio dicitur ratio Arithmetica. 2) Si quantitates ita comparantur inter se, ut per divisionem quæramus quoties una altera sit major aut minor, hæc ratio dicitur Geometrica: quotiens exponens quoties una quantitas altera est major aut minor inde dicitur exponens sive nomen rationis. In ratione duarum quantitatum prior dicitur antecedens & posterior consequens, & modus exprimendi rationem Geometricam est duplex, *sc.* $\frac{a}{b}$ sive $a:b$, uterque significat rationem a ad b.

§. 32. Duæ aut plures rationes Arithmeticæ unam eandemque differentiam habentes sunt inter se æquales; & duæ rationes Geometricæ uno eodemque exponente gaudentes sunt itidem inter se æquales.

§. 33. Quantitates considerari possunt aut tanquam simpliciter existentes sine ullo respectu compositionis, & hoc respectu dicuntur simplices; aut tanquam ex aliis quantitatibus per multiplicationem productæ; *e.g.* numerus 24 considerari potest tanquam compositum ex numeris 3 & 8 in se invicem

invicem ductis; & hoc respectu compositæ nuncupantur. Ita ratio duarum quantitatum simplicium ratio simplex, & ratio duarum quantitatum compositarum ratio composita appellatur. *E. g.* In Geometria superficiem plani parallelogrammi per multiplicationem longitudinis in latitudinem produci infra docebitur; igitur duo parallelogramma inter se conferentes, eorum longitudines æque ac latitudines comparare debemus; hinc ratio parallelogrammi unius ad aliud est ratio composita ex ratione longitudinis unius ad longitudinem alterius, & ex ratione latitudinis unius ad latitudinem alterius. Sic ratio ab ad de est composita ex ratione a ad d & b ad c. Sic ratio 8 ad 24 est composita ex ratione 4 ad 8 & 2 ad 3. In specie ratio composita ex alia ratione bis, ter, quater aut pluribus vicibus repetita & in semetipsam ducta dicitur aut duplicata, aut triplicata, aut quadruplicata, &c. in genere multiplicata. *E. g.* Ratio aa ad bb est duplicata, quia composita est ex ratione a ad b & a ad b; sic ratio aaa ad bbb est triplicata.

§. 34. Vice versa ratio simplex respectu suæ multiplicatæ dicitur submultiplicata, & in specie subduplicata, subtriplicata, &c. *E. g.* Ratio a ad b est subduplicata rationis aa ad bb, & eadem ratio a ad b est subtriplicata rationis aaa ad bbb. Sic si quantitatem aa per unam literam c, & bb per literam d exprimis, ratio c ad d erit æqualis rationi aa ad bb, & ratio c ad b erit subduplicata rationis c ad d, nec non ratio c ad d erit duplicata rationis a ad b. Potest etiam ratio subduplicata,

cata, ſubtriplicata, &c. hoc modo exprimi $\sqrt[2]{c} : \sqrt[2]{d}$, quod ſignificat rationem ſubduplicatam rationis c ad d; ſic $\sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d}$ ſignificat rationem ſubtriplicatam rationis c ad d, &c. ſignum $\surd$, quod radicis ſignum dicitur cum numeris 2, 3, &c. ſuperimpoſitis inferiores gradus quantitatum c & d indicant, ut inferius in capite de quantitatum dignitatibus ſeu potentiis prolixius explicabitur.

§ 35. Ratio compoſita ex alia ratione ſimplici & ejuſdem ſubduplicata ſeſquiplicata dicitur: Sic ratio $a\sqrt[2]{a} : b\sqrt[2]{b}$ eſt ſeſquiplicata rationis $a : b$; & vice verſa ratio $a : b$ eſt ſubſeſquiplicata rationis $a\sqrt[2]{a} : b\sqrt[2]{b}$. Sic ſi loco $a\sqrt[2]{a} : b\sqrt[2]{b}$ ponis $c : d$, hæc ratio $c : d$ erit etiam ſeſquiplicata rationis $a : b$ & vice verſa $a : b$ ſubſeſquiplicata rationis $c : d$.

§. 36. Omnes hæ appellationes rationum, nempe duplicatæ, triplicatæ, &c. ſubduplicatæ, ſubtriplicatæ, &c. ſeſquiplicatæ & ſubſeſquiplicatæ, &c. ab aliis fere æquiſonis, nempe duplæ, triplæ, ſubduplæ, ſubtriplæ, &c. ſeſquialteræ, ſeſquitertiæ, ſubſequialteræ, ſubſequitertiæ, &c. probe ſunt diſtinguendæ. In prioribus appellationibus rationes inter ſe comparamus; ſic ratio duplicata, triplicata, &c. ita dicitur reſpectu rationis ſimplicis: In poſterioribus unius ejuſdemque rationis terminos inter ſe comparamus; ſic ratio dupla, tripla, &c. dicitur, ſi terminus conſequens antecedentem bis, ter, &c. continet, ſubdupla, ſubtripla, ſi conſequens in antecedente bis, ter, &c. continetur; ſeſquialtera, ſeſquitertia, ſubſeſqui-

altera,

altera, ſubſeſquitertia, &c. ſi conſequens antecedentem $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$ vicibus continet, aut in eo continetur, ipſa ratione ab exponente rationis nomen ſortiente.

§. 37. Duæ rationes æquales conſtituunt proportionem, *e. g.* hæ duæ rationes æquales $\frac{1}{3}$ & $\frac{6}{18}$ faciunt proportionem. Si rationes ſunt Arithmeticæ, proportio dicitur Arithmetica; ſi Geometricæ Geometrica. Proportio Arithmetica hoc modo exprimitur $a.\ b \because c.\ d$, Geometrica ita $a.\ b :: c.\ d$ ſive $a : b = c : d$, ſigno $=$ æqualitatem rationum indicante. Utraque proportio hoc modo enunciatur, ut *a* eſt ad *b*, ſic *c* eſt ad *d*; ſed in proportione Arithmetica ſenſus phraſeos hic eſt, quanto *a* major aut minor eſt quam *b*, tanto *c* major aut minor eſt quam *d*: in ratione Geometrica ſignificatio hæc eſt; quoties *a* continet aut continetur in *b*, toties *c* continet aut continetur in *d*.

§. 38. Si terminus ſecundus idem eſt cum tertio, proportio dicitur continua, & hoc modo exprimitur:

$$\left.\begin{array}{l} \div\ a.\ b.\ c.\ \text{proportio Arithmetica} \\ ∺\ a.\ b.\ c\ \text{proportio Geometrica} \end{array}\right\}\text{continua}$$

Series quantitatum in proportione continua ultra progrediens progreſſio dicitur, En tibi exemplum utriuſque in numeris:

÷ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 &c. progreſſio Arithmetica.

∺ 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128 &c. progreſſio Geometrica.

De progressione Arithmetica.

§. 39. In quavis progressione Arithmetica summa termini primi cum ultimo æqualis est summæ duorum aliorum terminorum ab his æque distantium; sic 3 & 6 æque distantes ab 1 & 8 faciunt cum his unam eandemque summam nempe 9. Nam quoniam per totam progressionem una eademque differentia regnat, eam hoc modo exprimere potes:

$$\div \overset{1.}{a}.\ \overset{2.}{a+b}.\ \overset{3.}{a+2b}.\ \overset{4.}{a+3b}.\ \overset{5.}{a+4b}.\ \overset{6.}{a+5b},$$ &c. si progressio augescit, sive

$$\div a.\ a-b.\ a-2b.\ a-3b.\ a-4b.\ a-5b,$$ &c. si progressio decrescit. Et jamjam evidens est terminum primum a additum ad ultimum $a+5b$ eandem summam nempe $2a+5b$ producere, quam terminum tertium $a+2b$ additum ad quartum $a+3b$, quia utrobique æquale æquali addis. Hinc

§. 40. In progressione Arithmetica si numerus terminorum est par, terminum primum adde ultimo, ac summam hanc per dimidium numeri terminorum multiplica, & habebis summam omnium terminorum; *e. g.* in progressione superiori ab 1 ad 8 continuata adde 1 ad 8 quod facit 9, quos multiplica per 4, productum 36 est summa omnium terminorum.

§. 41. Si numerus terminorum est impar, duplum termini medii est æquale duobus aliis quibuscunque terminis hinc inde a medio æque distantibus.

tantibus. Hinc si numerum terminorum unitate minuis, & per dimidium numeri hujus unitate diminuti summam termini primi & ultimi multiplicas, & tandem dimidium summæ termini primi & ultimi huic producto addis; habebis summam omnium terminorum.

§. 42. Hinc etiam patet in proportione continua Arithmetica dimidium duorum terminorum extremorum æquale esse termino medio. Si igitur inter duos numeros datos 3 & 9 medium proportionalem Arithmeticum desideras; adde duos numeros datos, qui faciunt 12, cujus dimidium 6 est numerus medius inter 3 & 9.

§. 43. Sit terminus primus a & differentia primi à secundo b, secundus, si major est, erit $a+b$, & tertius $a+2b$; adde huic primum & habebis $2a+2b$, cujus dimidium est $a+b$, cui si addis b, quod est dimidium differentiæ primi termini a tertio habebis $a+2b$ tertium terminum; si ab eodem $a+b$, subtrahis b, habebis a primum terminum. Hinc si datur summa duorum terminorum & eorum differentia, adde dimidio summæ dimidium differentiæ, & habebis majorem numerum; item subtrahe dimidium differentiæ a dimidio summæ, & habebis minorem numerum. Hæc propositio magnæ utilitatis in demonstrationibus sequentibus erit, ideoque non est negligenda.

De

De progressione Geometrica, & in specie de Regula trium sive aurea.

§. 44. In quavis progressione Geometrica productum ex primo termino in ultimum est æquale producto ex duobus quibusvis aliis terminis a primo & ultimo hinc inde æquidistantibus per se invicem multiplicatis; & si numerus terminorum est impar, medio termino in semetipsum ducto: quod ex sequenti progressione patet, in qua exponens est b. $\div\!\!\div \overset{1}{a}.\ \overset{2}{ab}.\ \overset{3}{ab^2}.\ \overset{4}{ab^3}.\ \overset{5}{ab^4}$, &c. In hac progressione si terminum quintum $ab^4 = abbbb$ multiplicas per a, productum est $aabbbb$; item si terminum quartum $ab^3 = abbb$ multiplicas per secundum ab, productum est $aabbbb$; denique si terminum $ab^2 = abb$ ducis in semetipsum, productum est itidem $aabbbb$. Hæc tria producta iisdem factoribus a, a, b, b, b, b, constantia inter sese æqualia esse necessum est.

§. 45. Hinc methodus patet ex duobus numeris datis medium proportionalem inveniendi: si nempe numeros datos in se invicem ducis & ex producto talem numerum extrahis, qui in semetipsum ductus producto numerorum datorum æqualis est: Quæ operatio radicis quadratæ extractio vocatur, & in sequenti capite explicabitur. *E. g.* Sit numerus medius proportionalis inveniendus inter duos numeros datos 4 & 16. Dicis 16 ducti in 4 faciunt 64, cujus numeri radix quadrata est

8, nam

8, nam octies octo faciunt 64. Est igitur numerus 8 medius proportionalis inter 4 & 16. Sic quantitas media proportionalis inter *a* & *b* est $\sqrt{ab}$, hoc est radix quadrata ex producto quantitatis *a* in quantitatem *b* ductæ.

§. 46. Ita in proportione quatuor terminis constante factum ex duobus terminis extremis est æquale facto ex duobus mediis. *E. g.* In hac proportione $a.\ ab :: c.\ cb$, $a \times cb$ est æquale $ab \times c$; quia utrobique factores *a*, *c*, *b* sunt iidem. Ad hanc propositionem tanquam ad normam quævis proportio, num recte se habeat, est examinanda; nimirum num productum ex duobus terminis extremis æquale sit producto ex duobus mediis: nam in terminis proportionis variæ mutationes accidere possunt, ita tamen ut semper inter ipsos proportio servetur. Ita si in hac proportione $a.\ ab :: c.\ cb$, duos medios terminos transponis, habebis hanc proportionem $a.\ c :: ab.\ cb$. Transpone in hac terminos utriusque rationis, & habebis aliam proportionem $c.\ a :: cb.\ ab$. Adde in utraque ratione terminum consequentem antecedenti, & habebis $c+a.\ a :: cb+ab.\ ab$. Aufer consequentem ab antecedente, & habebis $c-a.\ a :: cb-ab.\ ab$. Multiplica antecedentem & consequentem terminum in una aut utraque ratione *v. g.* per *d*, & habebis $cd.\ ad :: cb.\ ab$, aut $cd.\ ad :: cbd.\ abd$. Divide antecedentem & consequentem terminum unius aut utriusque rationis per unam quantitatem *d*, & habebis $\frac{c}{d}.\ \frac{a}{d} :: cb.\ ab$, item $\frac{c}{d}.\ \frac{a}{d} :: \frac{cb}{d}.\ \frac{ab}{d}$, &c. In

omnibus

omnibus his mutationibus terminorum proportio ſemper inter eos obſervatur. Hæc propoſitio magnæ utilitatis in demonſtrationibus eſt, ideoque inprimis notanda.

§. 47. Quia productum ex duobis extremis terminis æquatur producto ex duobus mediis, igitur ſi productum duorum mediorum dividis per terminum primum, quotiens dabit terminum quartum; *e. g.* in hac proportione $a. c :: ab. cb$, productum duorum mediorum eſt cab, quod diviſum per terminum primum a dabit quartum cb. En habes regulam trium, hoc eſt, ex tribus terminis datis quartum proportionalem in quavis proportione Geometrica inveniendi. Hæc regula ob ingentem ſuam utilitatem vulgo aurea dicitur, atque in omnibus caſibus adhibenda eſt, ubi proportio Geometrica obtinet, *e. g.* in contractibus, ubi merces eadem ratione augetur aut diminuitur, qua pretium; in operis, ubi numerus operariorum eadem ratione augetur, qua tempus decreſcit, &c. Ex tribus terminis datis duo priores faciunt unam rationem, & tertius eſt terminus antecedens alterius rationis æqualis, cujus conſequens deſideratur. Hæc regula eſt vel ſimplex vel compoſita.

§. 48. Regula trium ſimplex eſt, ſi ratio data eſt ſimplex; *e. g.* Si tres ulnæ valent 36 ſolidos, quanti conſtabunt 9 ulnæ? Hic dicis, ut 3 ulnæ ſunt ad 9 ulnas, ita 36 ſolidi ad numerum ſolidorum quſitum, qui eſt 108. En operationem:

uln. *uln.* *s.*
3——9——36
9
———
3)324(108 *s.* facit.

Item, si 38 operarii opus aliquod conficere possunt in 9 diebus, quot operariis opus erit ad idem opus peragendum in tribus diebus? Hic ratio tibi dictitat, numerum operariorum esse augendum in eadem proportione qua tempus decrescit; pone ergo, ut 3 dies ad 9 dies, ita 38 operarii ad numerum operariorum, qui quæritur.

3——9——38
9
———
3)342(114 operarii.

§. 49. Regula trium composita est, si ratio data est composita ex duabus aut pluribus simplicibus; *e. g.* si certa pecuniæ summa producit 350 libras lucri spatio trium annorum, capiendo 5 pro centum; quantum producet eadem summa spatio 8 annorum, capiendo 6 pro 100? Hic vides ad inveniendum numerum quæsitum librarum comparandos tibi esse annos cum annis & lucrum annuum cum lucro annuo, quod facit rationem compositam, & regulæ forma erit hæc:

ut

ut 3 anni ad 8 annos
& ut 5 *l.* lucri ad 6 *l.* lucri, ita 350 *l.* ad

$\overline{15}$ $\overline{48}$

Ductis separatim terminis antecedentibus & consequentibus in se invicem habebis 3 terminos, nempe 15. 48 & 350, & invenies quartum terminum in quæstione eodem modo, quo in regula trium simplici, nempe 1120 *l.*

$$
\begin{array}{r}
15 \text{——} 48 \text{——} 350 \\
48 \\
\hline
2800 \\
140 \\
\hline
15)16800(1120 \\
13
\end{array}
$$

Aliud Exemplum.

Si 3000 homines possunt sustentari in urbe aliqua munita 650 modiis frumenti per 3 menses, si unicuique $2\frac{1}{2}$ libræ panis dantur; quot homines poterunt sustentari per 4 menses 1700 modiis, si unicuique 2 libræ panis dentur? Hic vides hominum numerum accrescere debere in eadem ratione qua numerus modiorum, sed decrescere ea ratione qua numerus mensium accrescit, & tandem accrescere in ea ratione qua pondus quotidiani victus decrescit; ponendum igitur:

ut

ut 650 modii ad 1700
& ut 4 menses ad 3 (7355
& ut 2 libræ ad $2\frac{1}{2}$; ita 3000 homines ad

5200 ——— 12750
3000

38250000(7355
185
290
300
4000

§. 50. Aliquando regula trium bis aut pluribus vicibus est applicanda, quo casu regula societatis appellatur, quia imprimis in societatibus obtinet, ubi quodlibet membrum de lucro aut damno pro rata participat. *E. g.* Si tres mercatores ineunt societatem mercaturæ faciendæ, ita ut primus conferat in commune ærarium 600 *l.* secundus 530 *l.* tertius 480 *l.* Post aliquot temporis spacium computo inito patet lucrum commune societatis esse 1724 *l.* quæritur quantum quisque de hoc lucro pro ratione suæ pecuniæ in ærarium collatæ participare debeat? Hic omnes tres pecuniæ in ærarium collatæ primum in unam summam sunt colligendæ, quæ faciunt 1610 *l.* deinde ponendum est, ut 1610 *l.* ad 1724 *l.* lucri, ita 600 *l.* ad partem lucri, quam primus sociorum capere debet; eodem modo regula est repetenda, ut 1610 *l.* ad 1724 *l.* lucri, ita 530 *l.* ad partem lucri secundo debitam; denique reiterandum est, ut 1610 *l.* ad 1724 *l.*

1724 *l.* lucri, ita 480 *l.* ad partem tertio competentem.

§. 51. Si socii tempore inæquali pecunias suas in ærario habuerunt, non solum pecuniarum sed & temporum ratio est habenda, adeoque hoc casu regula societatis evadit composita. *E. g.* Si tres mercatores habuerint talem societatem, ut primus habuerit in ærario positas 650 *l.* duos annos, secundus 740 *l.* unum annum & dimidium, tertius 710 *l.* unum solummodo annum, totum autem lucrum commune duorum annorum spatio fuerit 829 *l.* quæritur, quantum quisque de hoc lucro capere debeat? Regula erit sequens:

1) ut 650 + 740 + 710 *l.* ad 650
& ut 2 + 1½ + 1 anni ad 2; ita 829 *l.* lucri ad partem primo debitam

1300 + 1110 + 710 —— 1300
1110
710
3120

2) ut 3120 ad 1110; ita 829 *l.* ad partem secundi.
3) ut 3120 ad 710; ita 829 *l.* ad partem tertii.

§. 52. In miscendis materiis aridis aut liquidis, nec non in colliquandis metallis, peculiaris regula datur, quam Arithmetici regulam allegationis vocant. *E. g.* Si quis aurifaber habet duo genera argenti, quorum unum in quavis libra continet 11 uncias argenti puri, alterum 9½; quæritur qua.

qua proportione hæc duo genera argenti sunt colliquanda, ut obtineatur aliud genus, quod continet 10 uncias argenti puri in quavis libra ad formandum vas aliquod 5 libras grave? Hic vides, quodsi dimidium libræ de argento melioris notæ sumis, abundare dimidium unciæ argenti puri, nam in dimidio libræ argenti componendi 5 tantum sunt unciæ, & si de argento deterioris notæ sumis unam libram, deficit tibi dimidium unius unciæ, hic defectus ergo per melioris notæ superfluum compensatur; ideoque vides hæc duo genera argenti in hac proportione esse colliquanda, ut dimidio libræ argenti melioris addas unam libram deterioris. Hæc proportio in omnibus casibus sequenti modo invenitur: Pone supra genus in quæstione genus melioris notæ, & infra illud deterioris; scribe differentiam melioris à medio è regione vilioris, & differentiam vilioris à medio è regione melioris hoc modo:

11 unciæ		$\frac{1}{2}$
10	——	
$9\frac{1}{2}$	——	1

jam additis duabus differentiis $\frac{1}{2}$ & 1, quæ faciunt $1\frac{1}{2}$, pone: ut $1\frac{1}{2}$ unicæ est ad $\frac{1}{2}$; ita 5 libræ ad illas libras, quas de argento melioris notæ sumere debes pro vase formando. Item ut $1\frac{1}{2}$ unciæ ad 1 unciam; ita 5 libræ ad illas, quas de argento vilioris notæ capere debes.

Aliud Exemplum.

Mercator quidam habet tria genera liquorum, quorum primum constat 15 denariis per modium, secundum $13\frac{1}{2}$, tertium 12; hæc tria genera ita miscere cupit, ut modium 14 denariis vendere possit; quæritur quantum ipsi de quocunque genere capiendum sit ad replendos 300 modios? En tibi operationem:

d. | *mod.*

15 — $\frac{1}{2}$ + 2 | $\frac{4\frac{1}{2}}{9}$ — $\frac{2\frac{1}{2}}{5}$ — 300

14

$13\frac{1}{2}$ — 1

12 — 1 | 300

$4\frac{1}{2}$

9)1500($166\frac{6}{9}$ sive $\frac{2}{3}$
60
60
6

mod.

$\frac{4\frac{1}{2}}{9}$ — $\frac{1}{2}$ — 300

300

9)600($66\frac{2}{3}$
60
6

Ergo de illo qui valet 15 denarios capiendi sunt 166 modii & $\frac{2}{3}$, & de quolibet cæterorum 66 modii & $\frac{2}{3}$.

De

De Fractionibus.

§. 53. Fractio est pars unitatis aut alius cujusvis numeri, *e.g.* $\frac{1}{3}$ solidi est tertia pars unius solidi, & $\frac{1}{4}$ de 327 est quarta pars numeri 327. Fractio fractionis est pars partis, *e.g.* $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$ est quadrans de tertia parte.

§. 54. Ad inveniendum valorem fractionis unitatis in mensuris, monetis & ponderibus, *e. g.* quantum valeant $\frac{3}{7}$ unius Guineæ, sciendum est, tres septimas unius Guineæ idem esse ac partem septimam trium Guinearum; igitur reducas tres Guineas ad inferiorem sortem sc. ad solidos, multiplicando per 21, quia Guinea totidem solidos valet, & productum illud dividas per 7.

$$\begin{array}{r} 21 \\ 3 \\ \hline 7)63(9 \end{array}$$

Ergo $\frac{3}{7}$ unius Guineæ valent 9 solidos.

§. 55. Si $\frac{2}{3}$ numeri 328 desideras, sume de 328 unam tertiam, quæ est $109\frac{1}{3}$, hancque dupla, & habebis $218\frac{2}{3}$, hoc est, duas tertias numeri 328; ideoque numerus datus dividendus est per denominatorem fractionis & quotiens per numeratorem multiplicandus; idem prodibit si numerum datum per numeratorem multiplicas, & productum per denominatorem dividis.

§. 56. Si quantum valeat fractio fractionis scire cupis, hoc exinde facile intelliges, *e.g.* 1) quantum sit $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{5}$ unius libræ; hic vides te scire velle, quota pars totius libræ sit quadrans quintæ partis libræ; quodsi ergo quamlibet quintam partem in 4 partes divisam concipis, habes totam libram in 20 partes divisam; igitur quadrans quintæ partis est vigesima pars totius. In hoc casu igitur multiplicandus est numerator unius fractionis per numeratorem alius sc. 1 per 1, quod facit 1, item denominator unius fractionis per denominatorem alterius, sc. 4 per 5, quod facit 20. 2) Eadem regula valet, si numerator unius fractionis est 1, & alterius alius numerus unitate major, *e. g.* quantum est $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$? Ex præcedenti casu liquet $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ esse $\frac{1}{12}$, ergo $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$ erunt $\frac{2}{12}$. 3) Eadem regula valet, si uterque numerator est numerus unitate major, *e. g.* quantum est $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$? Ex secundo casu liquet; $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$ esse $\frac{2}{12}$, ergo $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$, quod est triplum de $\frac{1}{4}$, debet esse $\frac{6}{12}$, quod etiam est triplum de $\frac{2}{12}$. 4) Tandem eadem regula stat firma, si fractiones sint plures quam duæ, sc. multiplicando seorsim numeratores & denominatores omnium fractionum per seinvicem. *E. g.* quantum est $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$ de $\frac{5}{6}$? Ex tertio casu patet $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$ esse $\frac{6}{12}$, ergo $\frac{6}{12}$ de $\frac{5}{6}$ erunt $\frac{30}{72}$. *N. B.* Hæc operatio a quibusdam improprie multiplicatio fractionum vocatur.

§. 57. Fractionis magnitudo aut parvitas non numerorum quibus exprimitur magnitudine aut parvitate æstimanda est, sed e ratione quam numerator habet ad denominatorem. Si numerator multis vicibus continetur in denominatore, fractio est parva; si paucis vicibus, fractio est magna,

v. g.

v. g. $\frac{1}{4}$ plus eſt quam $\frac{4}{20}$. Ergo omnes fractiones unam eandemque rationem numeratoris ad denominatorem ſuum habentes ſunt æquales, *v. g.* hæ fractiones $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{16}$, ſunt inter ſe æquales; nam ſicut 1 continetur quater in 4, ſic 2 continentur quater in 8, & 4 in 16.

§. 58. Si fractionis numeratorem æque ac denominatorem per numerum unum eundemque multiplicas, fractio producta erit æqualis fractioni datæ, *e. g.* ſi in fractione $\frac{3}{4}$ multiplicas 3 æque ac 4 per 5, habebis $\frac{15}{20}$, quæ fractio eſt æqualis datæ $\frac{3}{4}$; nam ſicut ſimplum eſt ad ſimplum, ita multiplum ad multiplum, hoc eſt in hoc caſu, ut 3 ſunt ad 4, ita 3 quinquies ad 4 quinquies.

§. 59. Eadem ratione ſi fractionis numeratorem æque ac denominatorem per unum eundemque numerum dividis, fractio inde rediens eſt æqualis fractioni datæ, *e. g.* ſi in fractione $\frac{15}{30}$, 15 æque ac 30 dividis per 5, quotiens erit $\frac{3}{6}$, quæ fractio æqualis eſt datæ $\frac{15}{30}$: Nam ut totus numerus 15 eſt ad totum numerum 30, ita pars quinta de 15 eſt ad partem quintam de 30.

§. 60. Exinde elucet, quomodo fractio aliqua majoribus numeris expreſſa reducenda eſt ad fractionem æqualem minoribus numeris expreſſam; ſc. quærendus eſt numerus, qui numeratorem æque ac denominatorem exacte dividit, ut nihil remaneat. Item ſi fractiones diverſæ denominationis reducere cupis ad fractiones æquales ejuſdem denominationis, quod facere tibi neceſſum eſt, ſi numeratores eorum in unam ſummam addere, aut unum de alio ſubtrahere velis; ſc. multiplica numeratorem æque ac denominatorem unius fractionis per denominatorem alterius, si earum sunt duæ tantum; sin plures, multiplica numeratorem & denominatorem unius cujusque per productum ex denominatoribus reliquarum fractionum in se invicem multiplicatis. *E. g.* Sint hæ duæ fractiones $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ reducendæ ad eandem denominationem; multiplica $\frac{2}{3}$ per 4, & $\frac{3}{4}$ per 3, & habebis $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$ quæ duæ fractiones prioribus sunt æquales & eundem habent denominatorem 12. Item si tres hæ fractiones $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$ ad eandem denominationem sunt reducendæ, multiplica $\frac{2}{3}$ per $4 \times 5 = 20$, $\frac{3}{4}$ per $3 \times 5 = 15$, tandem $\frac{4}{5}$ per $3 \times 4 = 12$, & habebis $\frac{40}{60} + \frac{45}{60} + \frac{48}{60}$, quæ fractiones æquales sunt fractionibus datis $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$; ratio etiam evidens est, quare in omnibus idem denominator prodit, quia ex iisdem factoribus 3, 4 & 5 ubique est productus.

§. 61. Fractiones eodem modo ut numeri toti cum fractionibus aut numeris totis comparari possunt, si nempe fractiones eundem habent denominatorem, ipsæ sunt inter sese ut eorum numeratores, *e. g.* $\frac{2}{5}$ sunt ad $\frac{4}{5}$, hoc est, duæ quincunces sunt ad quatuor quincunces, ut 2 ad 4, sive ut 1 ad 2. Si fractiones habent diversos denominatores, ipsæ sunt inter se ut numeratores æqualium fractionum eundem habentium denominatorem, *e. g.* $\frac{2}{3}$ est ad $\frac{4}{5}$ ut $\frac{10}{15}$ ad $\frac{12}{15}$, sive ut 10 ad 12. Igitur ad cognoscendam rationem duarum fractionum diversæ denominationis, multiplica numeratorem prioris fractionis per denominatorem posterioris, & numeratorem posterioris

per

per denominatorem prioris, & erunt numeri producti inter se ut ipsæ fractiones. Similiter si rationem numeri totius ad fractionem, aut fractionis ad numerum totum scire vis, reducito numerum totum ad denominationem fractionis, *e.g.* si scire cupis rationem quam $\frac{2}{3}$ habet ad 35, reducito 35 ad tertias multiplicando 35 per 3, qui faciunt 105; sunt ergo $\frac{2}{3}$ ad 35 ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{105}{3}$ sive ut 2 ad 105. Ita 72 sunt ad $\frac{3}{4}$, ut $\frac{288}{4}$ ad $\frac{3}{4}$, sive ut 288 ad 3. *N. B.* Hanc operationem Arithmetici divisionem fractionum appellant.

§. 62. Fractiones decimales, de quibus supra, magnæ sunt utilitatis in calculo, quia facillime ad eandem denominationem reduci, & reductæ addi aut subtrahi possunt, *v. g.* decimæ reducuntur ad centesimas addendo unam nullitatem; ad millesimas, addendo duas; sic 0.3, hoc est 3 decimæ, faciunt 0.30, hoc est 30 centesimas, sive 0.300, hoc est 300 millesimas, &c. Item multiplicatio & divisio earum est omnium fractionum brevissima. Quamobrem multum expedit, fractiones reliquas ad fractiones decimales reducere, quod hoc modo perficitur: adde numeratori fractionis unam, duas, tres aut plures nullitates, & divide eum per denominatorem; quotiens dabit aut decimas, aut centesimas, aut millesimas, &c. partes. *E. g.* Si fractionem $\frac{3}{7}$ in decimalem convertere vis, adde numero 3 tot nullitates quot placet, *e. g.* tres, eritque 3000, hunc numerum divide per 7; quotiens 428 erit 0.428, hoc est 428 millionesimæ.

§. 63. Quoniam in monetis, mensuris & ponderibus species inferiores sunt partes seu fractiones superiorum, igitur quivis numerus speciei minoris tanquam fractus considerari potest, *e. g.* 3 denarii sunt $\frac{3}{12}$ sive $\frac{1}{4}$ unius solidi; 4 solidi sunt $\frac{4}{20}$ sive $\frac{1}{5}$ unius libræ; id quod maximo usui est ad calculum abbreviandum. *E. g.* Si una ulna panni valet 15*s.* 4*d.* quantum valebunt 432 ulnæ? Quia 4 denarii sunt $\frac{1}{3}$ unius solidi, multiplica 432 ulnas per $15\frac{1}{3}$ solidos, productum erit 6624 solidi, sive 331 libræ & 4 solidi.

$$\begin{array}{r} 432 \\ 15\frac{1}{3} \\ \hline 144 \\ 2160 \\ 432 \\ \hline 20)6624\,s.(331\,l.\ 4\,s. \end{array}$$

De Potentiis seu Dignitatibus earumque Radicibus.

§. 64. Quælibet quantitas simpliciter considerata sine respectu compositionis aut divisionis dicitur potentia, sive dignitas prima, sive radix, hæc per se ipsam multiplicata producit potentiam 2^dam^, hæc iterum per radicem multiplicata producit 3^tiam^ potentiam, quæ iterum per radicem multiplicata producit 4^tam^ &c. *E. g.* Sit quantitas a sive a^1 prima potentia, aa sive a^2 erit secunda,

a a a

aaa five a^3 tertia, $aaaa$ five a^4 quarta, &c. numeri 1, 2, 3, 4, &c. quantitati a appofiti dicuntur exponentes five indices potentiarum. Secunda potentia dicitur etiam quadratum, tertia cubus, quarta quadrato-quadratum, quia producitur per quadrati multiplicationem in femet-ipfum, nam $aa \times aa$ facit $aaaa$ five a^4; cubo-quadratum dicitur fexta potentia, quia producitur per multiplicationem cubi in femet-ipfum; cubo cubus dicitur potentia nona, quia producitur per elevationem cubi ad tertiam potentiam, nam $a^3 \times a^3 \times a^3$ facit a^9. Ita a refpectu a^2 dicitur radix quadrata, refpectu a^3 dicitur radix cubica, refpectu a^4 radix quadrato-quadrata feu radix quartæ potentiæ, refpectu a^5 radix quintæ potentiæ, refpctu a^6 radix quadrato-cubica feu fextæ potentiæ, &c.

§. 65. Ita fi quantitatem aliquam tanquam potentiam fecundam aut tertiam aut quartam, &c. confideras, ejus radix a gradu potentiæ quam quantitas habet nomen fuum capiet, diceturq; radix aut quadrata, aut cubica, aut quadrato-quadrata, &c. idq; hoc modo exprimetur, $\sqrt{a}$ five $\sqrt[2]{a}$, hoc eft, radix quadrata quantitatis a; $\sqrt[3]{a}$ hoc eft radix cubica quantitatis a &c. Signum $\sqrt{}$ radicem, & numerus ei fuperimpofitus gradum potentiæ quantitatis a denotat, eaq; propter exponens feu Index radicis dicitur.

§. 66. Series potentiarum $a^1.a^2.a^3.a^4.a^5.a^6.$ &c. naturali ordine afcendens eft in progreffione Geometrica, nam hæc progreffio unam eandemq;

exponen-

exponentem rationis habet, nempe a; & indices 1, 2, 3, 4, &c. sunt in progressione Arithmetica.

§. 67. Duæ potentiæ unam eandemq; radicem habentes multiplicantur si earum indices adduntur, *e. g.* $a^2 \times a^3$ facit a^5, nam a^2 est $=aa$, & $a^3= aaa$, sed $aa \times aaa$ facit a^5. Ita potentia una per aliam, quæ habet eandem radicem, dividitur, si index divisoris subtrahitur de indice dividendæ, *e. g.* a^7 divisa per a^5 facit a^3.

§. 68. Si potentiam quamcunq; tanquam radicem concipis eamq; ad gradum quemcunq; elevare cupis, multiplica indicem gradus per indicem potentiæ; *e. g.* sit quantitas a^2 elevanda ad tertium gradum, multiplica indicem 2 per 3, qui faciunt 6, indicem quantitatis a^2 ad tertium gradum elevatæ, nam $a^2 \times a^2 \times a^2$ facit a^6.

§. 69. Ita si potentiam aliquam tanquam ad alium gradum elevatam concipis ejusq; gradus radicem desideras, divide indicem potentiæ per indicem radicis. *E. g.* Si scire vis radicem cubicam de a^6 divide indicem 6 potentiæ a^6 per 3, indicem radicis Cubicæ, quotiens 2 erit exponens radicis cubicæ potentiæ a^6; nam sicut cubus de a^2 est a^6, ut jamjam dememonstratum est, ita radix cubica de a^6 est a^2; sed prior operatio fit per multiplicationem indicum, ergo hæc tanquam inversa per divisionem fieri debet.

§. 70. Hinc sequitur $\sqrt[2]{a}$ idem esse ac $a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a}$ idem ac $a^{\frac{1}{3}}$, &c. Itaque & radices tanquam potentiæ considerari possunt, quarum indices sunt fractio-

fractiones, & si duæ aut plures ejusmodi potentiæ unam eandemque habent primam potentiam, sed indices earum habent diversos denominatores, ad eandem denominationem possunt reduci, ut in præcedenti capite de fractionibus docuimus, eorumque numeratores addi. *E. g.* Quantitates $a^{\frac{1}{3}}$ & $a^{\frac{1}{2}}$ habent unam eandemque primam potentiam a, sed indices earum $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{2}$ habent diversos denominatores; reducantur igitur ad eandem denominationem, & erunt $\frac{2}{6}$ & $\frac{3}{6}$, jam adde numeratores, & habebis $\frac{5}{6}$. Est ergo $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}$. Eodem modo $\frac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{3}}}$ est $= \frac{a^{\frac{3}{12}}}{a^{\frac{4}{12}}}$, hoc est $a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$.

§. 71. Quoniam $\sqrt[2]{aa}$ est a, & $\sqrt{aab} = a\sqrt[2]{b}$, igitur si numerum aliquem datum in duos factores dividere potes, ita ut unus eorum sit ejusmodi potentia perfecta, ut index ejus idem sit cum indice radicis, hujus potentiæ radicem extrahe, & pone eum ante signum radicale, *e. g.* sit $\sqrt[3]{108}$, quoniam 108 est $= 27 \times 4$, & numerus 27 est tertia potentia numeri 3, cujus potentiæ index idem est cum indice radicis $\sqrt[3]{}$ numeri 108; igitur pone numerum 3, qui est radix cubica numeri 27 ante signum radicale, & alium factorem 4 post illud, qua ratione $3\sqrt[3]{4}$ erit $= \sqrt[3]{108}$.

§. 72. Potentia perfecta dicitur ea cujus radix perfecte extrahi potest; imperfecta vero cujus radix extrahi exacte nequit, & ejusmodi radix dicitur

citur surda. *V. g.* Radix cubica de 27 est 3; igitur 27 est cubus perfectus; sed radix cubica numeri 4 non potest exacte extrahi, ergo cubus 4. est imperfectus, & ejus radix dicitur surda.

§. 73. Radix pluribus terminis constans dicitur multinomica, in specie binomica si duobus, trinomica si tribus, &c. terminis constat. *E. g.* $a+b$ est radix binomica, $a+b+c$ trinomica.

§. 74. Si radicem binomicam ita, ut initio hujus capitis explicatum est, ad superiores potentias erigis erit,

$a+b$ prima potentia seu radix
$a^2+2ab+b^2$ secunda
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ tertia
$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ quarta
$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ quinta
$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$ sexta, &c.

Hic vides cujusvis potentiæ terminos componi ex potentiis terminorum radicis & certis numeris, qui unciæ dicuntur. Potentiæ termini primi radicis à summo gradu ad inferiores descendunt, *e. g.* in quinta potentia $a^5+a^4+a^3+a^2+a+1$, & potentiæ secundi termini radicis ab imo gradu ad superiores ascendunt, nempe $1+b+b^2+b^3+b^4$ b^5. Si igitur has duas series componis, habebis $1a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+1b^5$.

Unicæ quorumvis terminorum prodeunt si unicam præcedentis cujusvis termini multiplicas per indicem potentiæ a ejusdem termini, illudq;

pro-

productum dividis per numerum ejusdem termini sive per indicem potentiæ b termini sequentis. *E. g.* in sexta potentia uncia primi termini 1 multiplicata per indicem potentiæ a, qui est b, facit 6, qui divisi per 1, indicem potentiæ b in secundo termino, faciunt 6, unciam secundi termini; hæc multiplicata per 5, indicem potentiæ a in eodem termino, facit 30, quod productum divisum per numerum ejusdem termini, sive indicem potentiæ b in tertio termino, facit 15, unciam tertii termini; hæc multiplicata per 4 indicem potentiæ a ejusdem termini, facit 60, quod productum divisum per numerum 3 ejusdem termini, facit 20, unciam quarti termini, &c. Nec opus est uncias omnes hoc modo quærere; siquidem apparet, eas in quacunq; potentia ad certum gradum ascendere, & postea eodem modo descendere.

Demonstratio.

Quodsi potentia quævis per radicem ejus multiplicatur, factum est potentia uno gradu superior priori. *E. g.* Si potentia prima sive radix $a+b$ multiplicatur per $a+b$, factum est potentia secunda. Sed multiplicando $a+b$, sive quod idem est a^1+a^0b per a, indices potentiarum quantitatis a unitate augentur, ita ut facta sint a^2+a^1b. Sic multiplicando $a+b$, sive ab^0+b^1 per b, indices potentiarum quantitatis b unitate augentur, ita ut facta sint ab^1+b^2. Addendo omnia hæc facta prodit secunda potentia $a^2+2ab+b^2$. Eodem modo hanc seriem per a multiplicando indices

ces potentiarum quantitatis a in quibusvis terminis unitate augentur, ita ut facta sint $a^3+2a^2b+ab^2$; & multiplicando eandem seriem per b, indices potentiarum quantitatis b in quibusvis terminis unitate augentur, ita ut facta sint $a^2b+2ab^2+b^3$. Addendo omnia hæc facta prodit potentia tertia $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, &c. Ergo in quacunque potentia radicis binomicæ $a+b$ facta ex potentiis terminorum a & b prodeunt, si seriei potentiarum quantitatis a, a gradu summo naturali ordine ad imum descendentium jungitur series potentiarum quantitatis b ab imo ad summum gradum naturali ordine ascendentium.

Quantum ad uncias regula præcedens ita demonstratur: Quodsi potentia radicis binomicæ $a+b$ per eandem radicem multiplicatur, unciæ omnium terminorum illius potentiæ primum in coëfficientem termini primi radicis a, qui est 1, ac deinde in coëfficientem termini secundi b, qui itidem est 1, ducuntur. Quare series unciarum potentiæ illius bis prodit. *E. g.* Si potentia secunda $a^2+2ab+b^2$, multiplicatur per radicem $a+b$ sequentem in modum:

$$\begin{array}{rrrr}
1\,a^2 & +2\,ab & +1\,b^2 & \\
 & 1\,a & +1\,b & \\
\hline
1\,a^3 & +2\,a^2b & +1\,ab^2 & \\
 & 1\,a^2b & +2ab^2 & +1\,b^3 \\
\hline
1\,a^3 & +3\,a^2b & +3ab^2 & +1\,b^3;
\end{array}$$

Unciæ 1. 2. 1. primum in coëfficientem termini primi radicis a, qui est 1, deinde in coëfficientem

tem ſecundi termini b, qui itidem eſt 1, ducuntur ita ut facta ſint 1. 2. 1

1. 2. 1

Quibus ad ſe invicem additis prodeunt unciæ potentiæ tertiæ, quæ ſunt 1. 3. 3. 1. Per ſimilem hujus ſeriei additionem ad ſemetipſam prodit ſeries unciarum potentiæ quartæ 1. 4. 6. 4. 1, &c. Exinde patet 1) in quacunque potentia radicis binomicæ unciam primi & ultimi termini eſſe unitatem; 2) unciam ſecundi & penultimi termini eſſe ſemper æqualem indici potentiæ; 3) uncias tertii & antepenultimi termini, quin & binorum quorumvis terminorum a primo & ultimo æque diſtantium uncias, eſſe inter ſe æquales.

Ponantur unciæ potentiarum eo ordine ut in tabula ſequenti,

Unciæ potentiarum

1^mæ^	1 . 1 .
2^dæ^	1 . 2 . 1
3^tiæ^	1 . 3 . 3 . 1
4^tæ^	1 . 4 . 6 . 4 . 1
5^tæ^	1 . 5 . 10 . 10 . 5 . 1
6^tæ^	1 . 6 . 15 . 20 . 15 . 6 . 1 . &c.

& evidens eſt unciam tertii termini potentiæ cujuſvis æquari aggregato unciarum omnium in ſecundis quibuſque terminis potentiarum præcedentium. *V. g.* Uncia tertii termini potentiæ 6^{x}, quæ eſt 15, eſt aggregatum ex unciis $5+4+3+2+1$, in ſecunda columna exiſtentibus, terminis quibuſque ſecundis potentiarum præcedentium

tium competentibus. Sic uncia quarti termini æquatur aggregato unciarum omnium in tertiis quibusque terminis potentiarum præcedentium, &c. Sed aggregatum ex unciis potentiarum omnium præcedentium in secunda columna contentis æquatur unciæ termini secundi potentiæ datæ, ductæ in dimidium numeri unciarum præcedentium. Aggregatum ex unciis præcedentium potentiarum in tertia columna æquatur unciæ termini tertii potentiæ datæ, ductæ in tertiam partem numeri unciarum præcedentium. Aggregatum ex unciis præcedentium potentiarum in quarta columna æquatur unciæ termini quarti potentiæ datæ, ductæ in quartam partem numeri unciarum præcedentium, & sic deinceps. Igitur cum numeri unciarum in columnis respectivis decrescant in eadem ratione ac indices potentiarum primi termini radicis *a*, ob eandem rationem constat, unciam secundi termini cujusvis potentiæ ductam in indicem potentiæ *a* ejusdem termini & divisam per numerum ejusdem termini 2 producere unciam tertii termini. Hanc ductam in indicem potentiæ *a* tertii termini, & divisam per numerum ejusdem termini 3, producere unciam quarti termini, & sic deinceps. *Q. E. D.*

§. 75. Exinde formula prodit radicem binomicam ad potentiam aliquam indeterminatam, *h. e.* cujus exponens est numerus indeterminatus per *m* aut *n* expressus, elevandi, eritque talis: $a^m +$
$\frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{n.\times n-1}{1\times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{m\times m-1\times m-2}{1\times 2\times 3} a^{m-3} b^3 +$

$m\times m$

$\frac{m\times m-1\times m-2\times m-3}{1\times2\times3\times4}a^{m-4}b^4$, &c. Sed $a^{m-1}b$ est $=\frac{a^m b}{a}$, sic $a^{m-2}b^2$ est $=\frac{a^m b^2}{a^2}$, $a^{m-3}b^3=\frac{a^m b^3}{a^3}$, &c. igitur si a ponis $=P$, $\frac{b}{a}=Q$, & nominas primum terminum potentiæ A, secundum B, tertium C, &c. habebis primum terminum $P^m=A$, secundum $\frac{m}{1}P^m\frac{b}{a}=\frac{m}{1}AQ=B$, tertium $\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}P^m\frac{b^2}{a^2}$ $=\frac{m}{1}P^m\frac{b}{a}\times\frac{m-1}{2}\frac{b}{a}=B\times\frac{m-1}{2}Q=\frac{m-1}{2}BQ$, &c. Igitur formula universalis pro omnibus potentiis radicis binomicæ hæc prodit: $P^m+\frac{m}{1}AQ+\frac{m-1}{2}BQ+\frac{m-2}{3}CQ+\frac{m-3}{4}DQ$, &c.

§. 76. Et quoniam per §. 70. radices in modum potentiarum exprimi possunt, ita ut indices earum sint fractiones; *e. g.* $\sqrt[n]{x^m}$, hoc est, radix indeterminata n potentiæ indeterminatæ m de x, ita designari potest $x^{\frac{m}{n}}$; ideoque eadem formula pro radicibus extrahendis inservit, eritque talis: $P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+\frac{m-3n}{4n}DQ$, &c. Nam loco m in priori regula habebis in hac $\frac{m}{n}$; ergo loco $\frac{m-1}{2}$ in priori regula habebis in hac $\frac{m-n}{2n}$, nam 1 est $=\frac{n}{n}$ & $\frac{m}{2n}-\frac{n}{2n}$ est $=\frac{m-n}{2n}$, sic loco $\frac{m-2}{3}$ in priori regula habes in hac $\frac{m-2n}{3n}$, &c.

§. 77. Usum hujus regulæ ex sequenti exemplo perspicere potes. Sit radix quadrata extrahenda ex $aa-xx$, quod est quadratum imperfectum; quoniam index radicis quadratæ est 2, $\frac{m}{n}$ hic erit $\frac{1}{2}$, $aa=P$, $\frac{-x^2}{a^2}=Q$, ideoque $P^{\frac{m}{n}}=aa^{\frac{1}{2}}$ $=a=A$, $\frac{m}{n}AQ=\frac{1}{2}a\times\frac{-x^2}{a^2}=\frac{-ax^2}{2a^2}=\frac{-x^2}{2a}=B$, $\frac{m-n}{2n}BQ$ $=\frac{1-2}{4}\times\frac{-x^2}{2a}\times\frac{-x^2}{a^2}=\frac{-x^4}{8a^3}=C$, $\frac{m-2n}{3n}CQ=\frac{1-4}{6}\times\frac{-x^4}{8a^3}$ $\times\frac{-x^2}{a^2}=\frac{-3x^6}{48a^5}=\frac{-x^6}{16a^5}=D$, $\frac{m-3n}{4n}DQ=\frac{1-6}{8}\times\frac{-x^6}{16a^5}$ $\times\frac{-x^2}{a^2}=\frac{-5x^8}{128a^7}=E$, $\frac{m-4n}{5n}EQ=\frac{1-8}{10}\times\frac{-5x^8}{128a^7}\times\frac{-x^2}{a^2}$ $=\frac{-35x^{10}}{1280a^9}=\frac{-7x^{10}}{256a^9}$, &c. Est ergo radix quadrata quantitatis $aa-xx=a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}-\frac{7x^{10}}{256a^9}$ &c. in infinitum.

§. 78. Si radix infinita serie terminorum constat, eodem modo ac radix binomica ad potentiam quamvis indeterminatam elevari potest. Sit radix $a+by+cyy+dy^3+ey^4$, &c. in infinitum, sitque hæc series elevanda ad potentiam indeterminatam

minatam m. Pone $by+cyy+dy^3$, &c. $=u$; & erit $\overline{a+by+cyy,\ \&c.}|^{m} = a^{m} + \frac{m}{1}a^{m-1}u + \frac{m\times m-1}{1\times 2}a^{m-2}u^{2} + \frac{m\times m-1\times m-2}{1\times 2\times 3}a^{m-3}u^{3}$, &c. Substitue loco potentiarum quantitatis u valores earundem, hoc est, loco u, $by+cyy+dy^3$, &c. loco u^2, bby^2+2bcy^3, &c. & habebis loco $\frac{m}{1}a^{m-1}u$, $\frac{m}{1}a^{m-1}by + \frac{m}{1}a^{m-1}cy^{2} + \frac{m}{1}a^{m-1}dy^{3}$, &c. loco $\frac{m\times m-1}{1\times 2}a^{m-2}u^{2}$, habebis $\frac{m\times m-1}{1\times 2}a^{m-2}bby^{2} + \frac{m\times m-1}{1\times 1}a^{m-2}bcy^{3}$, &c. loco $\frac{m\times m-1\times m-2}{1\times 2\times 3}a^{m-3}u^{3}$, habebis $\frac{m\times m-1\times m-2}{1\times 2\times 3}a^{m-3}b^{3}y^{3}$, &c. Ponantur hæc producta ordine, colligendo ea omnia quæ eandem quantitatis y potentiam comprehendunt in unam eandemque classem, & habebis formulam sequentem:

$$a^{m} + \frac{m}{1}a^{m-1}by + \left.\begin{matrix} \frac{m\times m-1}{1\times 2}a^{m-2}bb \\ +\frac{m}{1}a^{m-1}c \end{matrix}\right\} y^{2}$$

$$\left.\begin{matrix} +\frac{m\times m-1\times m-2\,a^{m-3}b^{3}}{1\times 2\times 3} \\ +\frac{m\times m-1}{1\times 1}a^{m-2}bc \\ +\frac{m}{1}a^{m-1}d \end{matrix}\right\} y^{3}, \&c.$$

In hac formula duo distincte occurrunt ut ingeniosissimus *Abr. de Moivre* observavit, 1) facta ex potentiis quantitatum a, b, c, d, &c. qualia sunt $a^{m-1}b$, $a^{m-2}bb$, &c. 2) fractiones factis illis præfixæ & in eadem ductæ, quales sunt $\frac{m}{1}$ $\frac{m\times m-1}{1\times 2}$, &c. quæ unciæ dicuntur. Facta potentiarum a, b, c, d, &c. cujusvis classis prodeunt, 1) si facta ultimo præcedentis classis multiplicantur per b, & dividuntur per a; 2) si facta classis penultimæ multiplicantur per c, & dividuntur per a, exceptis iis quæ continent b; 3) si facta classis antepenultimæ multiplicantur per d, & dividuntur per a, exceptis iis quæ continent quantitates b & c, &c. Tandem omnibus hisce factis addendum est factum ex a^{m-1} in literam proxime sequentem. Sic facta classis sequentis sub y^4 erunt $a^{m-4}b^4$, $a^{m-3}bbc$, $a^{m-2}bd$, $a^{m-2}cc$, $a^{m-1}e$.

Uncia cujusque horum factorum fractio est, cujus numerator componitur totidem terminis seriei $m\times m-1\times m-2\times m-3$, &c. quot indices potentiarum b, c, d, &c. continent unitates. Sic unciæ facti $a^{m-3}b^2c$ numerator est $m\times m-1\times m-2$, quia indices potentiarum b^2c simul sumtæ componunt numerum 3. Denominator hujus fractionis est factum ex seriebus $1\times 2\times 3\times 4$, &c. $1\times 2\times 3$, &c. $1\times 2\times 3$, &c. quarum quævis continet

continet totidem terminos, quot potentiæ cujusvis b, c, d, &c. index separatim sumtus facti illius continet unitates. Sic denominator unciæ facti $a^{m-3}b^2c$ est $1\times2\times1$; nam index potentiæ b^2 est 2; igitur ex serie $1\times2\times3$, &c. duo termini priores mutuantur: & index potentiæ c est 1; igitur ex eadem serie unus tantum & primus terminus depromitur.

Ope hujusce regulæ formula præcedentem classem immediate sequens talis construitur:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{1\times2\times3\times4}\,a^{m-4}b^4 \\ \dfrac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{1\times2\times1}\,a^{m-3}b^2c \\ \dfrac{m\times\overline{m-1}}{1\times1}\,a^{m-2}bd \\ \dfrac{m\times\overline{m-1}}{1\times2}\,a^{m-2}c^2 \\ \dfrac{m}{1}\,a^{m-1}c \end{array}\right\} y^4$$

Ad hanc formulam recte applicandam sciendum est, literam m indicem cujusvis potentiæ designare, ad quam series infinita elevanda est, & literis a, b, c, &c. ordine alphabethico progredientibus quasvis alias itidem ordine alphabethico procedentes, nec non loco y aliam literam substitui posse. Ut, si series $hu+iu^2+ku^3$, &c. ad potentiam secundam est elevanda, m in formula præcedenti erit 2, loco a, b, c, &c. erunt h, i, k,

 &c

&c. & u loco y; quare formula talis evadet:

$$b^2u^2 + 2biu^3 \begin{matrix} +ii \\ +2bk \end{matrix}\Big\} u^4 \quad \begin{matrix} +2ik \\ +2bl \end{matrix}\Big\} u^5. \quad \&c.$$

Regulæ Speciales,

De Extractione Radicis Quadratæ.

§. 79. Si radicem binomicam $a+b$ per se ipsam multiplicas, habes ejus quadratum $a^2+2ab+b^2$; si radicem trinomicam $a+b+c$ in seipsam ducis, habes ejus quadratum $a^2+2ab+bb+2ac+2bc+cc$; si quadrinomicam $a+b+c+d$, habes quadratum ejus $a^2+2ab+bb+2ac+2bc+cc+2ad+2bd+2cd+dd$, &c. Hic vides quadratum radicis binomicæ constare 1) ex quadrato aa primi termini radicis a; 2) ex duplo primi termini $2a$ ducto in secundum terminum b, quod productum est $2ab$; 3) ex quadrato bb secundi termini b.

Quadratum radicis trinomicæ vides constare præter tria producta quadrati binomici $a^2+2ab+b^2$ 4) ex duplo primi & secundi termini $2a+2b$, ducto in tertium terminum c, quod facit $2ac+2bc$; 5) ex quadrato tertii termini cc.

Ita quadratum radicis quadrinomicæ præter hæc producta radicis trinomicæ $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+cc$, constat 6) ex duplo primi, secundi & tertii termini $2a+2b+2c$, ducto in quartum terminum d, quod facit $2ad+2bd+2cd$; 7) ex quadrato quarti termini.

Ita

Ita quadratum quinomicum, præter omnia producta quadrinomici, additum habet productum ex duplo quatuor priorum terminorum, ducto in quintum terminum; & quadratum hujus termini, &c.

§. 80. Quibus bene ponderatis apparet regula extrahendi radicem quadratam in numeris, si scilicet consideras quadrata omnium numerorum primariorum esse infra centum, adeoq; non pluribus quam duabus figuris constare, ita quadrata denariorum non pluribus ac quatuor, centenariorum non pluribus quam sex figuris: &c. quamobrem numerum quemvis quadratum in classes divide, a dextra incipiendo, & cuivis classi duas figuras attribuendo; 2) quære numero 35, in prima classe ad sinistram, proximum in tabula sequente, qui est 25, ejusq; radicem 5 tanquam quotientem annota, qui est primus terminus radicis, & quem supra per *a* expressimus; subtrahe numerum ejus quadratum 25 de 35, restant 10, quibus appone 24 in classe sequenti; 3) dupla radicem 5, productum 10 suppone numero 1024 dividendo, ita ut ultima figura divisoris 0 sit infra penultimam dividendi 2, annota quotientem 9, qui facit secundum terminum radicis; multiplica hunc in semetipsum, ut habeas quadratum secundi termini, & in divisorem, ut habeas duplum primi termini ductum in secundum, & subtrahe hoc productum a dividendo, remanent 43, quibus appone 63; 4) dupla duos terminos radicis inventos 59, factum 118 pone infra dividendum 4363, ita ut ultima figura divisoris 8 sit infra penultimam dividendi 6, annota quotientem 3, qui facit tertium terminum radicis; multiplica hunc per seipsum, ut habeas quadratum tertii termini, & in divisorem, ut habeas duplum primi & secundi termini ductum in tertium; subtrahe hoc productum a dividendo remanent 814. Si huic residuo adjungis duas nullitates & operationem tuam continuas, habebis 6 decimas. Si residuo post hanc operationem denuo duas nullitates apponis & calculum repetis, habebis 8 centesimas, &c. Nam quadratum de 10 est 100, & quadratum de 100 est 10000; igitur si ex residuo decimas extrahere vis multiplicas illud per 100, quod fit adjungendo 00, si centesimas adjungis 0000, si millesimas 000000, &c.

Radices

Radices	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrata	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729

35|24|63|593. 68 &c. *h.e.* $\frac{68}{100}$.

$aa=25$	radix.
	1024
$2a+b=$	109
b	9
$2ab+bb$	981
	4363
$2a+2b+c$	1183
c	3
$2ac+2bc+cc$	3549
	81400
$2a+2b+2c+d$	11866
d	6
$2ad+2bd+2cd+dd$	71196
	1020400
$2a+2b+2c+2d+e$	118728
e	8
$2ae+2be+2ce+2de+ee$	949824
	70576

De

De Extractione Radicus Cubicæ.

§. 81. Radicis binomicæ $a+b$ cubus est $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, trinomicæ $a+b+c$ cubus est $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$, &c. Hic vides cubum binomicum componi 1) ex cubo termini primi radicis a^3, 2) ex triplo quadrati primi termini $3a^2$ ducto in secundum terminum b, quod facit $3a^2b$, 3) ex triplo primi termini $3a$ ducto in quadratum secundi termini bb, quod facit $3ab^2$, 4) ex cubo secundi termini b^3.

Cubum trinomicum vides constare, præter hæc quatuor producta cubi binomici, 5) ex triplo quadrati primi & secundi termini, quod est $3a^2+6ab+3b^2$, ducto in tertium terminum c, quod facit $3a^2c+6abc+3b^2c$, 6) ex triplo primi & secundi termini $3a+3b$, ducto in quadratum tertii termini c^2, quod facit $3ac^2+3bc^2$, 7) ex cubo tertii termini b^3.

Ita cubo quadrinomico præter omnia producta trinomici addenda sunt producta, 8) ex triplo quadrati primi, secundi & tertii termini, ducto in quartum terminum, 9) ex triplo primi, secundi & tertii termini ducto in quadratum quarti termini, 10) cubus quarti termini, &c.

§. 82. Hinc sequitur regula extrahendi radicem cubicam ex numero quovis dato: scil. 1) divide numerum datum in classes incipiendo a dextra, & attribuendo cuivis classi tres figuras, quia omnes cubi numerorum primariorum non ultra tres, denariorum non ultra 6, & centenariorum non ultra 9, &c. figuras assurgunt; 2) numerum in classe prima ad sinistram quære in tabula præcedenti cuborum, aut ei proximum, ejusque radicem 3 annota, qui est primus terminus, cubumque ejus 27 a numero 30 subtrahe, restant 3, quibus adjunge numerum 434 in secunda classe, & habebis 3434: 3) quadratum 9 inventi primi termini radicis 3 multiplica per 3, & productum 27 ita pone infra numerum 3434 dividendum, ut ultima figura 7 divisoris subsit antepenultimæ 4 dividendi; divide & annota quotientem 1, ac per hunc multiplica divisorem 27; porro multiplica primum terminum 3 per 3 & productum 9 per quadratum secundi termini 1, quod facit 9, quos pone sub penultimam figuram dividendi 3, & tandem cubum 1 secundi termini pone sub ultimam dividendi; adde hæc tria producta, eorumque summam 2791 subtrahe de dividendo 3434, remanent 643, quibus appone 564 in tertia classe; 4) multiplica quadratum primi & secundi termini 31 per 3, productum ejus 2883 (ut in præcedenti operatione) ita pone infra dividendum, ut ultima ejus figura 3 subsit antepenultimæ 5 dividendi, jam divide & annota quotientem 2, per hunc multiplica divisorem, & habebis 5766, positos infra divisorem, quod est primum productum; deinde multiplica primum & secundum terminum radicis 31 per 3 & productum ejus per quadratum tertii termini 2, pone productum hoc 372, quod est secundum, ita ut ultima ejus figura 2 subsit penultimæ dividendi 6, & tandem pone cubum tertii termini 8 quod est tertium productum sub ultimam figuram dividendi 4; adde hæc tria producta, & eorum summam 580328 subtrahe de dividendo 643564, remanent 63236, quibus adjunge tres nullitates, & 5) repete operationem præcedentem, ut habeas 2 decimas, residuo 4792152 appone iterum tres nullitates & 6) reitera eandem operationem, ut habeas 1 centesimam, &c.

$$
\begin{array}{rl}
 & 30|434|564|312.21 \text{ \&c.} \\
a^3 = & \underline{27} \\
 & 3434 \\
3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & \underline{2791} \\
 & 643564 \\
3a^2 + bab + 3b^2 = & \underline{2883} \\
3a^2c + babc + 3b^2c = & 5766 \\
3ac^2 + 3bc^2 + c^3 = & \underline{3728} \\
3a^2c + babc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 = & \underline{580328} \\
 & 63236000 \\
 & \underline{292032} \\
 & 584064 \\
 & \underline{37448} \\
 & \underline{58443848} \\
 & 4792152000 \\
 & 29240652 \\
 & \underline{936631} \\
 & \underline{2925001831} \\
 & 1867150169
\end{array}
$$

Ut

Ut melius intelligas, quare in tertia & sequentibus operationibus tria illa producta ita sub dividendum ponis, ut primi figura ultima correspondeat antepenultimæ, secundi penultimæ, & tertii ultimæ figuræ dividendi, pone radicem binomicam in numeris:

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & & 20+ & 2 & \\
 & & 20+ & 2 & \\
\hline
 & & 40+ & 4 & \\
 & 400+ & 40 & & \\
\hline
 & 400+ & 80+ & 4 & \text{Quadratum} \\
 & & 20+ & 2 & \\
\hline
 & 800+ & 160+ & 8 & \\
8000+ & 1600+ & 80 & & \\
\hline
8000+ & 2400+ & 240+ & 8 & \text{Cubus.}
\end{array}
$$

Hic vides cubum radicis 20+2 constare, præter cubum primi termini 8000, ex tribus illis productis viz. 1) ex triplo quadrati primi termini ducto in secundum, quod facit 2400, in quo ultimus numerus 4 antepenultimum locum capit, 2) ex triplo primi termini ducto in quadratum secundi, quod facit 240, ubi ultimus numerus 4 penultimum locum tenet, 3) ex cubo secundi termini, cujus numerus ultimum locum habet, nulla figura nullitatis illum sequente.

§. 83. Si ex numero aliquo radicem quadratam & ex hac denuo radicem quadratam extrahis, hæc erit

erit radix quadrato-quadrata numeri dati, sive radix quartæ potentiæ. Si ex numero aliquo radicem quadratam & ex hac radicem cubicam extrahis, habebis radicem quadrato-cubicam, sive sextæ potentiæ. Si ex numero dato radicem cubicam & ex hac denuo radicem cubicam extrahis, habebis radicem cubico-cubicam, sive nonæ potentiæ, &c.

De Logarithmis.

§. 84. Logarithmi sunt numeri artificiales rationem numerorum naturalium exponentes, *e. g.* si ponis Geometricam progressionem numerorum quamcunque ab unitate incipientium, & sub ea aliam progressionem Arithmeticam a nullitate ordientem hoc modo:

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256,	&c.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8,	&c.

Numeri in Arithmetica progressione 1. 2. 3, &c. exponunt rationem numerorum correspondentium 2. 4. 8, &c. in progressione Geometrica, ad unitatem. Nam quoniam omnes termini progressionis sunt in proportione continua, omnes rationes binorum terminorum contiguorum sunt inter se æquales, sic 1 est ad 2, ut 2 ad 4, & ut 4 ad 8; si igitur rationem unitatis ad 2 pro mensura capis eamque ponis 1, ratio unitatis ad 4 erit 2, nam ratio 1 ad 4 composita est ex duabus rationibus æqualibus, 1 ad 2, & 2 ad 4=1 ad 2; ita ratio 1 ad 8 erit 3, quia composita est ex tribus æqualibus rationibus, nempe 1 ad 2, 2 ad 4 & 4 ad 8, &c. Ergo numeri 1. 2. 3, &c. exponunt

nunt magnitudinem rationis quam numeri 2. 4. 8, &c. habent ad unitatem, ideoque dicuntur Logarithmi. Et hoc in omnibus progressionibus verum est; *e. g.* Si ponis progressionem decuplam,

1.	10.	100.	1000.	10000.	100000,	&c.
0.	1.	2.	3.	4.	5,	&c.

Numeri 1. 2. 3, &c. exponunt rationem, quam numeri correspondentes 10. 100. 1000, &c. habent ad unitatem. Jam si rationem quam habet 1 ad 10, quam pro mensura capimus, eamque 1 ponimus ex infinito numero ratiuncularum æqualium compositam concipimus, eumque numerum 10000, &c. in infinitum, ponimus, ratio 1 ad 2 erit composita ex alio infinito numero ratiuncularum 30102, &c. in infinitum.

§. 85. Vice versa si numerum ratiuncularum ubique æqualem statuimus, totæ rationes erunt inter se ut earum ratiunculæ; *e. g.* si rationes 10 ad 1, 100 ad 1, 1000 ad 1, &c. omnes & singulas tribus ratiunculis compositas esse concipimus, ratiuncula totius rationis 10 ad 1 erit $\frac{1}{3}$, rationis 100 ad 1, $\frac{2}{3}$, rationis 1000 ad 1, $\frac{3}{3}$, &c. Jam vero hi numeri fracti $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, &c. sunt inter sese ut numeri toti 1, 2, 3, &c. Et idem valet in numeris infinitis; igitur & hæ ratiunculæ exponunt rationem quam numeri naturales 2. 3. 4, &c. habent ad unitatem, eorumque Logarithmi dicuntur.

§. 86. Et quoniam sunt infinita genera numerorum infinitorum, ideo & infinita genera Logarithmorum construi possunt; *e. g.* si ponis infinitum numerum ratiuncularum esse 10000, &c.

habebis Logarithmos Neperianos; si eligis hunc 2302585, &c. habebis Briggianos.

§. 87. At vero ratiunculæ seu Fluxiones rationum, quas habent numeri naturales ad unitatem inveniuntur per extractionem radicis infinitæ potentiæ, quod fit per regulam superius explicatam $P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ$, &c. scil. si numerum quemque duobus terminis exprimimus, cujus prior est 1, *e.g.* numerum 9 per $1+8$. Pone $8=q$, & erit radix indeterminatæ potentiæ $1+q =$
$$1+\frac{1}{n}q+\frac{1}{n}q\times\frac{1-n}{2n}q=\frac{1-n}{2n^2}q^2+\frac{1-n}{2n^2}q^2\times\frac{1-2n}{3n}q=\frac{1-3n+2n^2}{6n^3}q^3+\frac{1-3n+2n^2}{6n^3}q^3\times\frac{1-3n}{4n}q=\frac{1-5n+11n^2+6n^3}{24n^4}q^4,$$
&c. quæ est radix potentiæ indeterminatæ, cujus index est finitus; si vero index ejus n est infinitus, nn evadit infinities infinitum, adeoque fractiones hunc denominatorem habentes evanescunt tanquam infinities infinite parvæ, quare radix infinitæ potentiæ $1+q$ est $1+\frac{1}{n}q-\frac{1}{2n}q^2+\frac{1}{3n}q^3-\frac{1}{4n}q^4$, &c.

Sive $1+\frac{1}{n}\times q-\frac{1}{2}q^2+\frac{1}{3}q^3-\frac{1}{4}q^4$, &c.

§. 88. Hæc formula omnibus & singulis numeris adaptata ratiunculas eorum ad unitatem, sive Logarithmos, producit; & quoniam Logarithmi in ratione Arithmetica progrediuntur, eadem ratio inter eos servatur, si omnes unitate minuuntur;

tur, nam numeri 2. 3. 4. 5. 6, &c. habent eandem rationem Arithmeticam inter se, quam numeri 1. 2. 3. 4. 5, &c. quare formula Logarithmorum talis evadit: $\frac{1}{n} \times q - \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{3} q^3 - \frac{1}{4} q^4$, &c. hoc est, series infinita $q - \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{3} q^3$, &c. divisa per n, qui est index infinitæ potentiæ; qui index si est 1000, &c. ipsa series divisione non eget, sed ea sola Logarithmos Neperianos producit; sed ut obtineas Logarithmos Briggianos, eadem dividenda est per indicem infinitum 23025, &c.

§. 89. Si ratio est decrescens, qualis est fractionum ad unitatem, pone fractiones seu numeros unitate minores $= 1 - q$, & radix infinitæ potentiæ erit $1 - \frac{1}{m} q - \frac{1}{2m} q^2 - \frac{1}{3m} q^3 - \frac{1}{4m} q^4$, &c. quæ demta unitate producit Logarithmum negativum $-\frac{1}{m} \times q + \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{3} q^3 + \frac{1}{4} q^4$, &c.

§. 90. Si termini cujuscunque rationis ponuntur a & b, ita ut a sit loco 1, hoc modo q erit $= \frac{b-a}{a}$, si ratio accrescit; sin ea decrescit, b erit loco 1. & q erit $= \frac{b-a}{b}$; hinc Logarithmi dupliciter exprimi possunt, viz. ponendo $b - a = x$.

$$\frac{1}{m}\times\frac{x}{b}+\frac{x^2}{2bb}+\frac{x^3}{3b^3}+\frac{x^4}{4b^4}+\frac{x^5}{5b^5}, \text{ \&c. five}$$

$$\frac{1}{m}\times\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2aa}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\frac{x^5}{5a^5}, \text{ \&c.}$$

§. 91. Quodsi vero ratio quam habet a ad b dividitur in duas partes, quarum prima sit ratio quam habet a ad mediam proportionalem Arithmeticam inter a & b, quæ est $\frac{a+b}{2}$ & altera ea, quam hæc ipsa media Arithmetica $\frac{a+b}{2}$ habet ad alterum terminum rationis; summa harum duarum rationum erit ratio tota, quam habet a ad b. Substituendo ergo loco $\frac{a+b}{2}$, $\frac{z}{2}$, Logarithmi duarum partium rationis, quam habet a ad b, erunt:

$$\frac{1}{m}+\frac{x}{z}+\frac{xx}{2zz}+\frac{x^3}{3z^3}+\frac{x^4}{4z^4}+\frac{x^5}{5x^5}+\frac{x^6}{6x^6}, \text{ \&c.}$$

$$\text{\&}\ \frac{1}{m}\times\frac{x}{z}-\frac{xx}{2zz}+\frac{x^3}{3z^3}-\frac{x^4}{4z^4}+\frac{x^5}{5x^5}-\frac{x^6}{6x^6}, \text{ \&c.}$$

quorum summa $\frac{1}{m}\times\frac{2x}{z}*+\frac{2x^3}{3z^3}*+\frac{2x^5}{5z^5}*$ &c. est Logarithmus rationis, quam habet a ad b, ubi x est differentia terminorum $b-a$, & z eorum summa sive $a+b$, quæ series altero tanto celerius convergit priore, ideoq; canoni Logarithmorum conficiendo multo aptior est, siquidem primus hujus seriei terminus sufficit pro canone Logarithmorum septem figuris constantium, si differentia

rentia terminorum rationis est centesima pars eorum summæ, & hoc casu duo termini seriei producunt Logarithmos 12 figuris constantes.

§. 92. Eodem modo differentia duorum Logarithmorum supra dictorum accommodari potest ad inveniendos Logarithmos numerorum primorum, qui non ex aliis per multiplicationem producuntur, si habes Logarithmos numerorum utrinq; proximorum sive proxime minoris & majoris: nam auferendo rationem a ad $\frac{1}{2}z$ de ratione $\frac{1}{2}z$ ad b, quod fit per divisionem, differentia dat rationem, quam habet ab ad $\frac{1}{4}zz$; dimidium hujus rationis est ratio quam habet $\sqrt{ab}$ ad $\frac{1}{2}z$, hoc est, media proportionalis Geometrica ad mediam proportionalem Arithmeticam inter duos terminos rationis a & b. Quare Logarithmus ejus est dimidium differentiæ Logarithmorum earum rationum, *viz.* $\frac{1}{m}\times\frac{xx}{2z^2}+\frac{x^4}{4z^4}+\frac{x^6}{6z^6}$, &c.
Sed in ratione ab ad $\frac{1}{4}zz=\frac{1}{4}aa+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb$ differentia terminorum est $\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+bb$, hoc est quadratum dimidii differentiæ inter a & b, sive $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, quod in casu præsenti semper est 1; igitur ponendo summam terminorum $\frac{1}{4}zz+ab=yy$, Logarithmus rationis quam habet $\sqrt{ab}$ ad $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$ sive $\frac{z}{2}$ erit; $\frac{1}{m}\times\frac{1}{yy}+\frac{1}{3y^6}+\frac{1}{5y^{10}}+\frac{1}{7y^{14}}+\frac{1}{9y^{18}}$, &c. Quæ series omnibus aliis huc usq; inventis multo celerius convergit.

§. 93. Applicationem harum formularum vide exemplo illustratam in tabulis Logarithmorum ab

Henr. Sherwino editis: nobis sufficiat ultimæ formulæ usum uno exemplo elucidare; *viz.* dentur Logarithmi duorum numerorum 30 & 32, 1.4771212547 &c. & 1.5051499783, &c. eorum medius Arithmeticus est 1.4911356165, &c.

$$yy = \frac{zz}{4} + ab = 961 + 960 = 1921 \text{; igitur } \frac{1}{yy} \text{ est} =$$

$$\frac{1}{1921}; \quad \frac{1}{3y^6} = \frac{1}{yy \times 3y^4}; \quad \frac{1}{5y^{10}} = \frac{1}{yy \times 3y^4 \times \frac{5}{3} y^4} \text{ \&c.}$$

Quare ut habeas Logarithmum rationis $\sqrt{ab}$ ad $\frac{a-b}{2}$, dividenda est hæc series fractionum per numerum 2302585092 9, &c. sive multiplicanda per ejusdem reciprocum 0.4342944819 03251, &c. quod fit dividendo eum per $yy = 1921$, quotiens erit 2260775, qui additus Logarithmorum intermedio facit 1.4913616940 Logarithm: num. 31. ad novem figuras exactissimum; si vero Logarithmum pluribus figuris constantem desideras, dividendus est quotiens 2260775 per triplum quadrati numeri 1921, quod est 3×369024, & quotiens hujus divisionis denuo per $\frac{5}{3} \times 3690 24$, &c. Et omnes hi quotientes Logarithmorum intermedio 1491135, &c. sunt addendi.

N. B. Ad §. 90. melius intelligendum, sciendum est rationem rationi addi, si termini rationum antecedentes æque ac consequentes inter se multiplicantur; *e. g.* Ratio 1 ad 3 addita rationi 1 ad 4 facit rationem 1 ad 12; ita si ex terminis hujus extrahis radicem quadratam, habes rationem Arithmetice mediam inter rationes 1 ad 3 &

1 ad 4. Igitur si capis Logarithmum Arithmetice medium inter rationis duas 1 ad a & 1 ad b, hic est Logarithmus rationis 1 ad $\sqrt{ab}$: jam vero scire cupis Logarithmum rationis 1 ad $\frac{a+b}{2}$; igitur Logarithmus rationis $\sqrt{ab}$ ad $\frac{a+b}{2}$ Logarithmo rationis 1 ad $\sqrt{ab}$ est addendus; nam ratio $\sqrt{ab}$ ad $\frac{a+b}{2}$ addita rationi 1 ad $\sqrt{ab}$, facit rationem $\sqrt{ab}$ ad $\frac{a+b}{2} \times \sqrt{ab}$, sive 1 ad $\frac{a+b}{2}$.

§. 94. Non vero omnium numerorum Logarithmi tantum laboris requirunt, sed tantum primorum, hoc est, eorum qui non per multiplicationem aliorum producuntur, quales sunt 1, 2, 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, &c. Omittimus numerum 5 quia est dimidium numeri 10, cujus Logarithmus est notus; hujus ergo æque ac reliquorum numerorum Logarithmi per additionem, subtractionem, multiplicationem per 2, 3, &c. aut divisionem, prodeunt. *E. g.* Si habes Logarithmum num. 2 & 3, innumeros alios per additionem, subtractionem, &c. invenire potes: nam Logarithmus numeri 2 additus ad seipsum facit Logarithmum numeri 4. Idem Logarithmus num. 2 substractus de Logarithmo num. 10 producit Logarithmum num. 5. Idem additus ad Logarithmum num. 3 facit Logarithmum num. 6. Idem additus ad Logarithmum num. 4 dat Logarithmum num. 8, &c.

§. 95. Et hæc de canone Logarithmorum construendo dixisse sufficiant, restat ut paucis usum ejus explicemus. *viz.* Logarithmi multiplicationem, numerorum naturalium in additionem & divisionem in subtractionem, convertunt: nam Logarithmi sunt exponentes rationum, quas numeri naturales 2. 3. 4, &c. habent ad unitatem; jam si ponis exponentem rationis 1 ad 2 esse 1,

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256, &c.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8, &c

Exponens rationis 1 ad 4 erit 2, &c. ut superius explicatum est, & ratio 1 ad 8 addita rationi 1 ad 2 facit rationem 1 ad 16, cujus exponens sive Logarithmus est 4: nam hæc ratio 1 ad 16 una ratione major est quam ratio 1 ad 8, *viz.* ratione 8 ad 16, quæ est æqualis rationi 1 ad 2, igitur Logarithmo 3 rationis 1 ad 8 addendus est Logarithmus 1 rationis 1 ad 2, summa eorum 4 facit Logarithmum rationis 1 ad 16. Ita ratio 1 ad 4 addita rationi 1 ad 16 facit rationem 1 ad 64, nam hæc duabus rationibus major est ratione 1 ad 16, sed 1 ad 4 continet duas rationes æquales n p. 1 ad 2 & 2 ad 4. Ita ratione 1 ad 4 substracta a ratione 1 ad 128, quod fit per divisionem terminorum, remanet ratio 1 ad 32: nam subtrahis a ratione 1 ad 128, quæ composita est septem rationibus æqualibus, duas itidem æquales, nempe 32 ad 64 & 64 ad 128, quibus componitur ratio 1 ad 4; restant ergo 5 rationes æquales quibus composita est ratio 1 ad 32. Cum igitur vulgo Logarithmi attribuantur numeris 2. 4. 8, &c. qui proprie loquendo sunt Logarithmi ratio-

num

num quas hi numeri 2. 4, 8, &c. habent ad unitatem; hinc facile concipi poteſt, quare additio & ſubtractio in Logarithmis correſpondeat multiplicationi & diviſioni in numeris.

§. 96. Porro ſi rationem 1 ad 16 duplicas, habes rationem 1 ad 256, cujus Logarithmus eſt 8 duplum Logarithmi 4 rationis 1 ad 16; & vice verſa ratio ſubduplicata rationis 1 ad 256 eſt ratio 1 ad 16, cujus Logarithmus eſt 4, dimidium Logarithmi 8. Hinc patet Logarithmi alicujus duplum correſpondere numeri ejus quadrato, & Logarithmi dimidium radici quadratæ numeri: & ob eandem rationem Logarithmi tertia pars correſpondet numeri radici cubicæ, Logarithmi quarta pars, numeri radici quadrato-quadratæ, &c.

De Analyſi ſive Reſolutione Problematum Algebraica.

§. 97. Methodus ſolvendi Problemata Algebraice hæc eſt: 1) Circumſtantiis Problematis ſeu quæſtionis bene ponderatis, quantitates cognitæ ab incognitis ſive inveniendis, diverſis characteribus ſunt diſtinguendæ; *e. g.* cognitas primis Alphabethi literis *a*, *b*, *c*, &c. incognitas ultimis *u*, *x*, *y*, *z*, &c. indicando; id quod denominationem appellamus.

2) Quantitates cognitæ cum incognita, ita combinandæ ſunt, ut duæ quantitates æquales prodeant, id quod vel ex circumſtantiis Problematis ſtatim elucet, vel ex principiis Arithmetices

aut Geometriæ patet. Hanc operationem æquationem vocamus, signo æqualitatis = eam indicantes. Si plures quantitates incognitæ sunt, totidem æquationes sunt conficiendæ, quot sunt quantitates incognitæ.

3) Quantitas incognita à cognitis est separanda, ita ut sola remaneat in una parte æquationis, in altera nonnisi cognitis existentibus, si *viz.* in æquatione una solummodo quantitas incognita est; sin plures earum sunt, una earum a cæteris incognitis & cognitis eodem modo separanda, & valor ejus in altera æquationis parte positus in secunda æquatione loco ejus substituendus est; jam si hæc nonnisi unam quantitatem incognitam continet, illa à cognitis est separanda; sin duas aut plures, valor unius earum est quærendus ut in prima æquatione, & hic substituendus est in tertia æquatione; eoq; modo progrediendum est, donec in ultima æquatione nonnisi una quantitas incognita existat, a cognitis separanda. Nam si in æquatione ultima plures quantitates incognitæ sunt, Problema est indeterminatum, ejusq; solutio est varia. Ipsa separatio incognitarum quantitatum a cognitis resolutio appellatur, eaq; fit vel per additionem quantitatum cognitarum aut incognitarum cum signis contrariis, si eædem signo plus vel minus sunt combinatæ, quod transpositionem vocamus; vel per multiplicationem, si cognita per incognitam aut hæc per illam divisa est; vel per divisionem, si cognita per incognitam est multiplicata; vel deniq; per extractionem radicis, si quantitas incognita

nita habet indicem ſecundæ aut ſuperioris cujuſdam potentiæ.

4) Ex æquatione ultima in qua quantitas incognita a cognitis eſt ſeparata, formula Arithmetica vel Geometrica deducitur, cujus ope Problema datum vel in numeris vel figuris poteſt ſolvi. Hæc operatio conſtructio vocatur.

§. 98. Propoſitiones Arithmetices æquationibus conficiendis inſervientes ſunt:

1) In proportione Arithmetica continua ſumma primi & tertii termini æqualis eſt duplo ſecundi termini.

2) In proportione Arithmetica 4 terminis conſtante ſumma duorum extremorum æqualis eſt ſummæ duorum mediorum.

3) Dimidium ſummæ duarum quantitatum additum dimidio differentiæ earundem æqualis eſt quantitati majori, dimidiumque ſummæ diminutum dimidio differentiæ quantitati minori; *e. g.* ſint duæ quantitates 3 & 5, earum ſumma eſt 8 & differentia 2; dimidium ſummæ 4 additum dimidio differentiæ 1, facit 5 majorem numerum, idemque dimidium ſummæ 4 diminutum dimidio differentiæ 1 facit 3, numerum minorem.

4) In proportione Geometrica continua factum primi termini ducti in tertium æquale eſt quadrato ſecundi termini.

5) In proportione Geometrica 4 terminis conſtante factum ex duobus terminis extremis in ſe invicem ductis æquale eſt facto ex duobus mediis.

Exempla

Exempla Analysis.

§. 99. Problema 1. Homo aliquis interrogatus, quantum pecuniæ habeat, respondet, si haberet alterum tantum & insuper quintam partem solidorum suorum demtis tribus, quod tum possideret centum solidos; quæritur quantum habeat?

In hac quæstione quantitas incognita est numerus solidorum, quos homo iste possidet, quam denominamus litera x, ejus alterum tantum est $2x$ & 5^{ta} pars $\frac{1}{5}x$. Quantitates cognitæ sunt 3 solidi, quos denominamus litera a, & 100 solidi, quos denominamus b.

Jam ex ipsis verbis Problematis elucet, quantitatem $2x+\frac{1}{5}x-a$ æqualem esse quantitati b; habes ergo æquationem, $2x+\frac{1}{5}x-a=b$. In hac æquatione vides x divisum esse per 5, nam $\frac{1}{5}x$ idem est ac $\frac{x}{5}$; ergo multiplica æquationem totam per 5, & habebis $10x+x-5a=5b$, huic adde $5a$

$10x+x=5b+5a$ & habebis, sive.

$11x=5b+5a$. In hac æquatione x multiplicatum est per 11; ergo divide æquationem per 11, & habebis $x=\frac{5b+5a}{11}$ quæ æquatio solvit Problema. Constructio seu formula solvendi est hæc: Adde 100 ad 3 & summam 103 multiplica per 5, productum 515 divide per 11, quotiens $46\frac{2}{11}$, est numerus solidorum, quos homo iste possidet.

§. 98. Pro-

§. 100. PROBLEMA 2. Homo aliquis fecit testamentum in quo reliquit filio suo 100 *l.* & quartam partem ejus quod restat de tota hæreditate, substractis his 100 *l.* & filiæ suæ reliquit 50 *l.* cum dimidio ejus quod restat de hæreditate, subtracta portione filii & 50 *l.* Divisione facta apparuit portionem filiæ 25 libris excedere portionem filii: Quæritur quanta fuerit hæreditas? Pone hæreditatem $= x$, $100\,l. = a$; erit residuum primum hæreditatis $x - a$, & ejus quarta pars $\frac{x - a}{4}$.

Pone etiam $50\,l. = b$, $25 = c$. residuum secundum erit $x - a - b - \frac{x + a}{4}$, ejus dimidium

$$\frac{x - a - b - \frac{x + a}{4}}{2}.$$

Jam quoniam portio filiæ excedit portionem filii quantitate c, eadem quantitas c portioni filii est addenda, ut habeas æquationem:

$$a + \frac{x - a}{4} + c = b + \frac{x - a - b - \frac{x + a}{4}}{2}$$ multiplica per 2,

$$2a + \frac{2x - 2a}{4} + 2c = 2b + x - a - b - \frac{x + a}{4}$$ multiplica per 4,

$$8a + 2x - 2a + 8c = 8b + 4x - 4a - 4b - x + a,\ h.e.$$

$$6a + 2x + 8c = 4b + 3x - 3a$$ transpone $4b - 3a$

$$9a - 4b + 8c + 2x = 3x$$ transpone $2x$

$$9a - 4b + 8c = x$$

Con-

Constructio $9a = 900\,l.$
$8c = 200\,l.$
$-4b = -200\,l.$

$9a + 8c - 4b = x = 900\,l.$ hæreditas.

§. 101. Problema 3. Inveniendi sunt duo numeri, qui sunt in ratione 1 ad 5, sed sortiuntur rationem 1 ad 3, si minori numero addis 4 & majori 6.

Pone numerum minorem x, & majorem y, & erit

$x . y :: 1 . 5$ item $x + 4 . y + 6 :: 1 . 3$

$5x = y$ $\quad 3x + 12 = y + 6$

substitue loco y valorem suum $\quad 3x + 12 = 5x + 6$

transpone $3x$. $\quad 12 = 2x + 6$

transpone 6. $\quad 6 = 2x$

divide per 2. $\quad 3 = x$

Ergo numerus minor est 3 & major 15.

§. 102. Si in æquatione quantitas incognita mixta est cum cognitis, talis æquatio dicitur impura; sin illa ab his penitus est separata, pura vocatur.

§. 103. Æquatio dicitur vel primi, vel secundi, vel tertii, vel superioris gradus, si quantitas incognita in ea comprehensa est vel primæ, vel secundæ, vel tertiæ, vel superioris potentiæ, *e. g.* $x\,a = b\,b$ est æquatio primi gradus; $x^2 a = b\,b$ est æquatio secundi gradus, quia quantitas incognita x habet indicem secundæ potentiæ 2.

§. 104. Æqua-

§. 104. Æquationes impuræ primi gradus redduntur puræ per transpositionem, multiplicationem & divisionem, ut ex prioribus exemplis clarum est: Item æquationes superiorum graduum, si potentia incognita per totam æquationem eundem indicem potentiæ retinet, *e. g.* $x^2a - x^2b = cd$. Hic vides x^2 multiplicatum esse per $a-b$; si ergo per hanc quantitatem $a-b$ æquationem dividis habes æquationem puram $x^2 = \frac{cd}{a-b}$.

§. 105. Si vero quantitatis incognitæ indices sunt varii in eadem æquatione, solutio peragenda est extractione radicis, si potentia est perfecta; sin vero est imperfecta aut redundans, defectus est supplendus & nimium resecandum, ut radix extrahi possit, quod in æquationibus secundi gradus facile peragitur, *e. g.* sit æquatio impura $x^2 + \frac{xb}{3} = d$. Hic $x^2 + \frac{xb}{3}$ est quadratum imperfectum, si loco $\frac{b}{3}$ substituis c, habebis $x^2 + cx$ quod quadratum imperfectum redditur completum addendo $\frac{cc}{4}$, *h. e.* quadratum de $\frac{c}{2}$, nam quadratum radicis binomicæ $x + \frac{c}{2}$ constat quadratis duorum terminorum $x^2 + \frac{cc}{4}$, & facto duplo secundi termini in primum, quod est cx. æquatio ergo proposita talis evadit:

x^2

$x^2+cx+\frac{cc}{4}=d+\frac{cc}{4}$ Extrahe radicem, & habebis

$x+\frac{c}{2}=\sqrt{d+\frac{cc}{4}}$ transpone $\frac{c}{2}$

$x=\sqrt{d+\frac{cc}{4}}-\frac{c}{2}$

§. 106. Potentiæ superiorum graduum imperfectæ non tam facile suppleri, nec ejusmodi æquationes tam facile resolvi possunt, & regulæ hactenus inventæ specialibus tantum casibus applicari possunt; ejusmodi ergo æquationes melius tentando solvuntur hoc modo: 1) Pone ordine omnes potentias quantitatis incognitæ incipiendo a gradu summo, *e. g.* si æquatio est $x^2a+x^2b+xd+x^3c=e$, pone ordine gradus quantitatis x hoc modo $x^3c+x^2a+x^2b+xd=e$.

2) Si duo aut plures termini continent eundem indicem quantitatis incognitæ, ut hic x^2a+x^2b, substitue loco $a+b$ unam literam, sed talem quæ nondum in æquatione continetur, *e. g.* f, & habebis loco x^2a+x^2b terminum unum x^2f; æquatio ergo brevior evadit, nempe $x^3c+x^2f+xd=e$.

3) Divide æquationem per factorem primi termini c, & habebis $x^3+\frac{x^2f}{c}+\frac{xd}{c}=\frac{e}{c}$

4) Loco literarum f, d, c, e, substitue numeros, quos denotant, & numeri $\frac{e}{c}$, qui non cum quantitate incognita mixtus est, quære tot divisores, quot potes, numerum ipsum exacte dividentes,

tes; ex his diviſoribus ille, qui cum x per ſignum minus conjunctus æquationem exacte dividit, eſt ipſa quantitas incognita x.

5) Quodſi in æquatione termini aliqui deſunt, illi ſigno * ſupplentur, *e. g.* in hac æquatione, $x^3 * -xd-e=o$, deeſt terminus ſecundus, nam indicem 3 potentiæ x^3 immediate ſequitur index 1 potentiæ x, ergo terminus x^2 deeſt in æquatione, qui per ſignum * ſuppletur.

Exemplum Æquationis gradus ſuperioris.

§. 107. PROBLEMA 4. Ex æquationibus hiſce duabus,

$$xx+yy-x-y=a=78$$

& $xy+x+y=b=39$, quærendi ſunt valores quantitatum incognitarum x & y?

$$xy+x+y=b$$

$$xy+y=b-x$$

$$y=\frac{b-x}{x+1} \quad \text{ergo } yy=\frac{bb-2bx+x^2}{x^2+2x+1}$$

ſubſtitue valores de y & yy in æquatione priori, & habebis $xx+\frac{bb-2bx+xx}{x^2+2x+1}-x-\frac{b+x}{x+1}=a$

multiplica per $x+1$ & habebis:

$$x^3+x^2+\frac{bb-2bx+xx}{x+1}-x^2-x-b+x=ax+a$$

hoc eſt, $x^3+\frac{bb-2bx+x^2}{x+1}-b=ax+a$. multiplica denuo per $x+1$, & habebis

x^4

$x^4+x^3+bb-2bx+x^2-bx-b=ax^2+ax+ax+a$

hoc est $x^4+x^3+x^2-ax^2-3bx-2ax+bb-b-a=0$

Pone $1-a=-c$, $-3b-2a=-d$, $bb-b-a=e$;

& erit Æquatio talis: [rum

$x^4+x^3-cx^2-dx+e=0$, substitue valores litera-

$x^4+x^3+77x^2-273x+1404=0$. Ex divisoribus, qui numerum ultimum 1404 exacte dividunt, unus est 9, pone $x-9$ divisorem æquationis, & divide.

$$
\begin{array}{l}
x-9)\,x^4+x^3-77x^2-273x+1404\,(x^3+10x^2+13x-156 \\
\quad x^4-9x^3 \\
\quad\quad +10x^3-77x^2 \\
\quad\quad +10x^3-90x^2 \\
\quad\quad\quad +13x^2-273x \\
\quad\quad\quad +13x^2-117x \\
\quad\quad\quad\quad -156x+1404 \\
\quad\quad\quad\quad -156x+1404 \\
\quad\quad\quad\quad\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Quoniam ergo $x-9$ totam æquationem exacte dividit, 9 est genuinus valor quantitatis x, & $y=\frac{b-x}{x+1}=\frac{39-9}{9+1}=\frac{30}{10}=3$.

Demonstratio.

Æquatio $x^4+x^3-77x^2-273x-1404=0$, composita est ex tribus factoribus, viz, 1) ex $x-9=0$, 2) ex $x-3=0$, & tertio ex $x^2+13x+52=x^2+13x+52$, hæc ultima Æquatio si

per

per secundam multiplicatur, factum ejus est $x^3 + 10x^2 + 13x - 156 = 0$, & hoc productum multiplicatum per $x - 9 = 0$, facit $x^4 + x^3 - 77x^2 - 273x + 1404 = 0$. Habes igitur duos valores quantitatis x, *viz.* 9 & 3, si ex illis eligis valorem 9, alter 3 erit valor quantitatis y.

De Calculo Fluxionum.

§. 108. Quantitates extensas motu generari in Geometria docetur. Sic linea generatur motu puncti, superficies motu lineæ, & corpus sive solidum motu superficiei. (Fig. 1.) Ponamus jam punctum A motu composito ferri, *viz.* uno in directione lineæ AB, & altero in directione lineæ AD, ita tamen ut uterq; motus sit æquabilis, hoc est, ut lineæ motu generatæ sint temporibus proportionales, *e. g.* Si punctum A in directione AB produxit lineam Ap sive df uno temporis momento, & idem punctum producat in duobus momentis lineam As sive hk, duplicem prioris, ac eadem ratio in motu puncti A in directione AD observetur, hoc motu composito punctum A describet rectam AC diagonalem Parallelogrammi $ABCm$.

§. 109. Si vero punctum A ejusmodi motu composito fertur, ut unus in directione AD sit æquabilis, alter vero in directione AB sit acceleratus; punctum ita motum describet curvam convexam $Aeib$; fiat enim linea bt duplex lineæ de, & ducatur per puncta Aet linea recta An; hanc ipsam describeret punctum A, si motus uterque esset æquabilis: sed quoniam idem punctum *A* motu in directione *A B* in secundo momento temporis describit lineam *A p*, sive *h i*, majorem linea *h t*, motus hic est acceleratus. Eodem modo probatur, punctum *A* motu composito ex motu æquabili in directione *A D* & retardato in directione *A B* describere curvam concavam *A g l C*.

§. 110. Supponatur ergo punctum *A* motu composito describere curvam *A e i C*; lineæ *o e*, *p i*, quas punctum *A* describit motu in directione *A D*, & lineæ *de*, *h i*, quas idem punctum describit motu in directione *A B*, sunt continuo accrescentes seu fluentes, sed in differenti ratione, pro ratione diversa velocitatum sive virium motricium, quas Fluxiones appellamus. Calculus igitur Fluxionum docet ex quantitatibus fluentibus invenire rationem velocitatum, quibus quantitates fluentes accrescunt, quæ methodus Fluxionum directa vocatur; aut ex ratione velocitatum invenire quantitates fluentes, quæ methodus Fluxionum inversa dicitur.

111. Ponamus quantitatem *x x* generari in certo temporis spatio motu puncti *A* in directione *A B*, & eandem in sequenti temporis momento augeri incremento *x u*; hoc incrementum quam minimum etiam infinita varietate velocitatum generatur, nam velocitas puncti *A* continuo acceleratur in directione *A B*. Ipsa ergo incrementa quam minima etiam nullatenus ipsam velocitatem exprimunt, si concipiuntur tanquam generata, sed si concipiuntur tanquam nascentia, sive in principio gene-

generationis suæ, ita ut penitus evanescant; nam tum demum velocitas non variatur, & ipsa inter se sunt tanquam velocitates.

§. 112. Velocitas quam punctum *A* acquisivit veniendo usq; ad punctum *i*, ex infinita varietate velocitatum antecedentium orta est, & velocitates incrementorum nascentium in omnibus punctis curvæ mutantur, & ob eandem rationem mutationes ipsæ velocitatum mutantur, & series harum mutationum procedit in infinitum. Igitur dantur Fluxiones Fluxionum, & Fluxionum Fluxionum Fluxiones, &c. hoc est, Fluxiones secundi, tertii, quarti, &c. generis.

§. 113. Quantitates constantes primis Alphabethi literis a, b, c, &c. & fluentes, hoc est, continuo variantes sive augescendo sive decrescendo, ultimis u, z, y, z, indicabimus. *E. g.* in circulo linea constans est diamiter, & fluentes sunt abscissæ & ordinatæ; illam igitur exprimemus per a, has per x & y.

§. 114. Si quantitas constans conjungitur cum quantitate fluente, quantitas complexa est itidem quantitas fluens, *e. g.* quantitates complexæ $a+x$, $a-x$, $x-a$, $-x-a$, sunt omnes quantitates fluentes: nam sicut quantitas incognita addita quantitati cognitæ producit summam incognitam, & quantitas cognita ab incognita, aut hæc ab illa, substracta relinquit quantitatem incognitam; ita quantitas fluens addita constanti, aut utra earum alia decurtata, reddit totam aut residuam quantitatem fluentem.

§. 115. Ipsa vero Fluxio seu velocitas incrementorum quantitatis fluentis x licet per additionem aut subtractionem quantitatis constantis a nec augeatur nec minuatur; attamen ratio exprimendi Fluxionem quantitatis fluentis x solius diversa esse debet a ratione exprimendi Fluxionem quantitatis complexæ $a+x$, sive $x-a$, &c. Quamobrem Fluxionem quantitatis fluentis x puncto literæ eidem superimposito indicamus hoc modo, $\dot{x}$; Fluxionem vero quantitatis complexæ $a+x$ sive $x-a$, puncto vinculo quantitates a & x conjungenti superimposito, hoc modo, $\dot{\overline{a+x}}$, $\dot{\overline{x-a}}$, quod indicat Fluxionem incrementorum quantitatis fluentis à quantitate constanti a initium capientium, sicut $\dot{x}$ denotat Fluxionem incrementorum quantitatis Fluentis à o incipientium.

§. 116. Fluxionem fractionis $\frac{x}{a}$ per punctum fissuræ lineolæ insitum significabimus hoc modo, $-\frac{x}{a}\!\!\cdot-$, si fractio est sola; sin ea complectitur aliam quantitatem, punctum vinculo imponemus, ut $\dot{\overline{\frac{a+a}{x}}}$ est Fluxio quantitatis $\frac{a+a}{x}$.

§. 117. Fluxiones quantitatum, quæ habent duas aut plures dimensiones, *h. e.* quæ compositæ sunt ex duobus aut pluribus factoribus in seinvicem ductis, *e. g.* $a\,x$, $a\,x\,y$, &c. per sequentem regulam magni hujus calculi inventoris inveniuntur: Multiplica quantitatem compositam per indi-

indicem potentiæ cujusvis factoris, & in quovis producto indicem eundem potentiæ unitate diminue, idemq; productum per Fluxionem radicis ejusdem potentiæ multiplica; *e. g.* sit quantitas fluens xyy, cujus fluxio desideratur; multiplica primum xyy per indicem potentiæ x, qui est 1, & habebis xyy; deinde indicem potentiæ x unitate diminue, & erit x^0yy, hoc est $1yy$; tandem hoc productum $1yy$ multiplica per Fluxionem quantitatis primæ x, quæ est ipsa radix, & habebis $yy\dot{x}$. Eodem modo eandem quantitatem compositam xy^2 multiplica per exponentem potentiæ y^2, quod facit $2xy^2$; diminue indicem 2 unitate, & habebis $2xy$; tandem multiplica hoc productum per Fluxionem ipsius radicis y, quod facit $2xy\dot{y}$. Est igitur Fluxio quantitatis xyy, $\dot{x}yy+2xy\dot{y}$.

Demonstratio.

Pone quantitatem admodum exiguam o, erunt momenta seu incrementa quantitatum fluentium x & y, $o\dot{x}$ & $o\dot{y}$, generata in quam minimo temporis spatio; igitur si quantitates fluentes in præsenti temporis momento sunt x & y in immediate sequenti momento erunt $x+o\dot{x}$ & $y+o\dot{y}$; substitue has quantitates auctas loco x & y in quantitate composita xyy; & habebis $yyx+2yxo\dot{y}+xoo\dot{y}\dot{y}+o\dot{x}yy+2yoo\dot{y}\dot{x}+ooo\dot{x}\dot{y}\dot{y}$, quæ est

 quan-

quantitas yyx aucta in sequenti temporis momento; aufer yyx, & remanet incrementum $2yxo\dot{y}+xoo\dot{y}\dot{y}+o\dot{x}yy+2yoo\dot{y}\dot{x}+ooo\dot{x}\dot{y}\dot{y}$; divide hoc incrementum per o, & habebis $2yx\dot{y}+xo\dot{y}\dot{y}+\dot{x}yy+2yo\dot{y}\dot{x}+oo\dot{x}\dot{y}\dot{y}$, ubi termini eandem inter sese rationem habent, quam in priori; pone jam quantitatem perexiguam o penitus evanescentem, & omnes quantitates in illam ductæ etiam evanescent, ita ut quantitas $2yx\dot{y}+\dot{x}yy$, sola remaneat, quæ ipsam naturam seu rationem Fluxionis quantitatis xyy exprimit. Ita si detur æquatio $aax-xxy-y^3x=o$, per eandem regulam ratio Fluxionis ejus invenitur $aa\dot{x}-2yx\dot{x}-xx\dot{y}-3y^2\dot{y}x-y^3\dot{x}$.

§. 118. Si in æquatione duo aut plures termini simul sumti faciunt productum ex duabus aut pluribus quantitatibus in seinvicem ductis, melius est, ipsum productum in suos factores resolvere, & postquam resolutum est Fluxionem ejus quærere, *e. g.* in æquatione $ax+xx=yy$ termini $ax+xx$ sunt productum ex $a+x$ in x, erit ergo Fluxio producti $ax+xx$ hæcce $\dot{\overline{a+x}}\times x+\overline{a+x}\times\dot{x}$; ita Fluxio quantitatis complexæ $aa-xx$ est $\overline{a+x}\times\dot{\overline{a-x}}+\overline{a-x}\times\dot{\overline{a+x}}$. Sic in quantitate complexa $xx-a$ ipsum terminum a concipe compositum ex $\sqrt{a}$ & $\sqrt{a}$, & habebis Fluxionem quantitatis

titatis fluentis x $x-a$, $\overline{\dot{x}-\sqrt{a}}\times\overline{x+\sqrt{a}}+\overline{\dot{x}+\sqrt{a}}$ $\times\overline{x-\sqrt{a}}$.

§. 119. Ad inveniendum Fluxionem fractionis $\frac{x}{a}$ pone $\frac{x}{a}=u$, & erit $x=au$, cujus æquationis Fluxio est $\dot{x}=a\dot{u}$; ergo $\frac{\dot{x}}{a}=\dot{u}$, quæ est Fluxio fractionis $\frac{x}{a}$. Sit fractio $\frac{x}{y}$, pone $\frac{x}{y}=u$, & erit $x=yu$, cujus Fluxio est $\dot{x}=y\dot{u}+u\dot{y}$; transpone $u\dot{y}$, & erit $\dot{x}-u\dot{y}=y\dot{u}$; divide per y & habebis $\frac{\dot{x}-u\dot{y}}{y}=\dot{u}$; substitue valorem quantitis u in priori parte æquationis, & habebis $\frac{\dot{x}}{y}-\frac{x\dot{y}}{yy}$ sive $\frac{y\dot{x}-x\dot{y}}{yy}=\dot{u}$, quæ est Fluxio fractionis $\frac{x}{y}$; hoc est, Factum numeratoris in Fluxionem denominatoris aufer a facto denominatoris in Fluxionem numeratoris, ipsamq; differentiam divide per quadratum denominatoris.

§. 120. Fluxiones radicum per regulam generalem §. 117, expositam inveniuntur. *E. g.* quærenda est Fluxio quantitatis $\sqrt{x}$? quoniam $\sqrt{x}$ est $=x^{\frac{1}{2}}$, ut in capite de potentiis demonstratum est, habebis Fluxionem

onem ejus $= \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \dot{x} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} \dot{x} = \frac{1}{2}$ $x^{-\frac{1}{2}} \dot{x}$. Ita Fluxio quantitatis $\sqrt[3]{y^2} = y^{\frac{2}{3}}$ est $\frac{2}{3}$ $y^{\frac{2}{3}-1} \dot{y} = \frac{2}{3} y^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} \dot{y} = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} \dot{y}$. Et in genere Fluxio quantitatis $\sqrt[m]{y^n} = y^{\frac{n}{m}}$ est $\frac{n}{m} y^{\frac{n}{m}-1} \dot{y} =$ $\frac{n}{m} y^{\frac{n-m}{m}} \dot{y}$.

§. 121. Si Progressionem potentiarum descendentem, $a^3. a^2. a^1$, continuas, erit $\frac{a}{a}. \frac{a}{a^2}. \frac{a}{a^3}$ &c. sive $1. \frac{1}{a}. \frac{1}{a^2}. \frac{1}{a^3}$, &c. At verò, quoniam indices potentiarum sunt in progressione Arithmetica 3. 2. 1. ut in capite de potentiis prolixius dictum est, si hanc progressionem continuas, erit 0. — 1. — 2. — 3, &c. Ergo progressio $a^3. a^2. a^1. \frac{1}{a}. \frac{1}{a^2}. \frac{1}{a^3}$, &c. etiam hoc modo exprimi potest $a^3. a^2. a^1. a^0. a^{-1} a^{-2} a^{-3}$, &c. Sed a^0 idem esse ac 1, non est quod mireris; nam omnes terminos progressionis per 1 multiplicatos concipe; jam sicut a significat 1 multiplicatum per primam potentiam quantitatis a, sic a^0 significat 1 multiplicatum per nullam potentiam quantitatis a, ita a^{-1} significat 1 multiplicatum per potentiam primam negativam quantitatis a, &c. Quibus suppositis facile est Fluxiones invenire fractionum,

qua-

quarum numerator eſt 1 aut quælibet alia quantitas conſtans. *E. g.* ſi quæris Fluxionem fractionis $\frac{1}{x^2}$, loco ejus ſubſtitue expreſſionem ejus æquivalentem x^{-2}, & habebis Fluxionem ejus per regulam generalem $-2x^{-3}\dot{x}$. Sic Fluxio fractionis $\frac{1}{x^m}$ eſt $-mx^{-m-1}\dot{x} = \frac{-m}{x^{m+1}} \times \dot{x}$.

§. 122. Fluxiones potentiarum, quarum index eſt variabilis, per x, y, &c. expreſſus, peculiari methodo opus habent, cujus fundamentum poſitum eſt in capite de Logarithmis, *viz.* Logarithmus quantitatis x^y eſt æqualis Logarithmo quantitatis x per y multiplicato ſeu brevius $l: x^y = y\,l: x$. Porro Logarithmus quantitatis $1+x$ eſt $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, &c. cujus Fluxio eſt $\dot{x} - x\dot{x} + x^2\dot{x} - x^3\dot{x}$, &c. $= \dot{x} \times \overline{1 - x + x^2 - x^3}$, &c. $= \dot{x} \times \frac{1}{x+1} = \frac{\dot{x}}{x+1}$. Nam divide 1 per $x+1$ ſequenti modo: $1+x)\ 1\ (1 - x + x^2 - x^3$, &c.

$$\begin{array}{l}
1+x \\
\hline
-x \\
-x-xx \\
\hline
\quad +xx \\
\quad +xx+x^3 \\
\hline
\qquad -x^3
\end{array}$$

Et vides quotientem eandem ſeriem infinitam $1 - x + x^2 - x^3$, &c. comprehendere; quamobrem Fluxio Logarithmi quantitatis $x+1$ eſt $\frac{\dot{x}}{x+1}$.

Fluxio-

fluxionem logarithmi quantitatis alicujus compendiose hoc modo indicamus, $l:\overset{\cdot}{\overline{a+x}}^{y}$, hoc est, Fluxio Logarithmi quantitatis $\overline{a+x}^{y}$.

§. 123. His præmissis facile est Fluxiones omnis generis Logarithmorum invenire, *e. g.* $l:\overset{\cdot}{\overline{xx+yy}}=\frac{2x\dot{x}+2y\dot{y}}{xx+yy}$. $l:\overset{\cdot}{\overline{ax^3+x^3}}=\frac{2ax\dot{x}+3x^2\dot{x}}{ax^2+x^3}=\frac{2a\dot{x}+3x\dot{x}}{ax+x^2}$. Nam pone $xx+yy=z+1$, & erit Fluxio ejus $2x\dot{x}+2y\dot{y}=\dot{z}$. Sed Fluxio Logarithmi $z+1$ est $\frac{\dot{z}}{z+1}$; substitue loco $\dot{z}$ & $z+1$ valores earum quantitatum, & habebis $\frac{2x\dot{x}+2y\dot{y}}{xx+yy}$.

§. 124. Potentiæ Logarithmorum quantitatum ita exprimuntur; $l^n:x$, hoc est, potentia n Logarithmi quantitatis x, sive Logarithmus quantitatis x elevatus ad potentiam, cujus index est n. Et Fluxiones earum ita indicantur; $\overset{n\ \div}{l:x}$; item $\overset{n\qquad\cdot\qquad}{\overline{l:x+a}}$ item $\overset{r\qquad\cdot\qquad m}{\overline{l:x+a}}$. Inveniuntur autem ope regulæ generalis; nam sit quantitas fluens $\overset{n\qquad\qquad}{\overline{l:x+a}}$, hoc est, potentia n Logarithmi quantitatis $x+a$; multiplica eam per indicem potentiæ n, & ipsum indicem unitate diminue, tandem multiplica eam per Fluxionem radicis potentiæ

tentiæ, & habebis $nl: \overline{a+x}^{\,n-1} \times \frac{\dot{x}}{a+x}$, quæ est Fluxio quantitatis propositæ $l: \overline{x+a}^{\,n}$.

§. 125. Si potentia cujus Fluxio desideratur habet indicem variabilem, *e. g.* x^y, pone $x^y = z$, & erit $y\, l: x$, hoc est, y multiplicatum per Logarithmum $x = l: z$, cujus Fluxio est $= \dot{y}\, l: x + \frac{\dot{x} y}{x} = \frac{\dot{z}}{z}$, per consequens $\dot{z} = z\dot{y}\, l: x + \frac{zy\dot{x}}{x}$, & substituto valore quantitatis z, $= x^y \times \overline{\dot{y}\, l: x + \frac{y\dot{x}}{x}} = x^y \times \dot{y}\, l: x + x^{y-1} y \dot{x}$.

§. 126. Sit quantitas data u^{x^y}, hoc est potentia x radicis u elevata ad potentiam y. Pone $u^{x^y} = z$, & erit $x^y\, l: u = l: z$, cujus Fluxio est $\dot{\overline{x^y}}\, l: u + \frac{x^y \dot{u}}{u} = \frac{\dot{z}}{z}$ & $\dot{z} = z \times \overline{\dot{\overline{x^y}}\, l: u + \frac{x^y \dot{u}}{u}}$; sed $\dot{\overline{x^y}}$, hoc est, fluxio quantitatis x^y, est $= x^y \times \dot{y}\, l: x + x^{y-1} y \dot{x}$; substitue ergo hunc valorem loco $\dot{\overline{x^y}}$, & habebis $\dot{z} = z \times x^y \times \dot{y}\, l: x + x^{y-1} y \dot{x} \times l: u + \frac{x^y \dot{u}}{u}$; & substituto valore quantitatis z; $\dot{z} = u^{x^y} \times \overline{x^y \times \dot{y}\, l: x + x^{y-1} y \dot{x} \times l: u + \frac{x^y \dot{u}}{u}} = u^{x^y} \times x^y \dot{y}\, l: x\, l: u + u^{x^y} \times x^{y-1} y \dot{x}\, l: u + u^{x^y} \times \frac{x^y \dot{u}}{u}$.

§. 127.

§. 127. Et hæc de methodo Fluxionum directa dixisse sufficiant, restat ut usum ejus in naturâ curvarum indaganda paucis ostendamus in curva omnium notissima, nempe circulo. Ad curvam quamcunque ducatur tangens *T t* (Fig. 2.) ad punctum quodvis *n*, & ex eodem puncto *n* perpendicularis *n N* ad tangentem *T t*, quæ occurrit rectæ *T A* curvam per medium secanti (quæ & axis seu diameter vocatur) in puncto *N*; porro ducatur ex eodem puncto *n* perpendicularis *n P* ad Axem *A B*; linea *N n* dicitur normalis, *N P* subnormalis, & *P T* subtangens. Jam quoniam triangula *y x n* & *n P T* sunt similia ut in Geometria demonstrabitur, *y x* vero est incrementum evanescens ordinatæ *n P*, & *x n* incrementum evanescens abscissæ *P B*; pone Fluxionem ordinatæ $yx=\dot{y}$, & Fluxionem abscissæ $xn=\dot{x}$, & habebis $\dot{y} . \dot{x} :: y . \frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$, quæ est generalis expressio subtangentis omnium curvarum. Quære jam ex æquatione curvæ valorem quantitatis *y* & Fluxionis $\dot{y}$. *E. g.* In circulo *nP* est media proportionalis inter *A P* & *P B*, ergo

$$\overline{a-x}\times x=yy$$

$$ax-xx=yy$$ cujus Fluxio est

$$\overline{a-\dot{x}}\times x+\dot{x}\times\overline{a-x}=2y\dot{y}$$

$$\frac{\overline{a-\dot{x}}\times x+\dot{x}\times\overline{a-x}}{2y}=\dot{y}$$

At

At vero $\sqrt{ax-xx}=y$, ergo $\dfrac{\dot{\overline{a-x}}\times x+\dot{x}\times\overline{a-x}}{2\sqrt{ax-xx}}=\dot{y}$.

Substitue jam in subtangente $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$ loco y & $\dot{y}$ earum valores, & habebis

$$\frac{\sqrt{ax-xx}\times\dot{x}}{\dfrac{\dot{\overline{a-x}}\times x+\dot{x}\times\overline{a-x}}{2\sqrt{ax-xx}}} = \frac{\overline{2ax-xx}\times\dot{x}}{\dot{\overline{a-x}}\times x+\dot{x}\times\overline{a-x}}$$

Sed $\dot{\overline{a-x}}$ est $=-\dot{x}$; nam quantitas constans a Fluxioni $-\dot{x}$ nihil addit, sed est tantum terminus a quo Fluxionis; igitur

$$\frac{\overline{2ax-xx}\times\dot{x}}{\dot{\overline{a-x}}\times x+\dot{x}\times\overline{a-x}} \text{ est } = \frac{\overline{2ax-xx}\times\dot{x}}{-x\dot{x}+a\dot{x}-x\dot{x}} = \frac{\overline{2ax-xx}}{a-2x}$$

$$=\frac{2ax-2xx}{a-2x}.$$

§. 128. Eodem modo subnormalis PN invenitur; nam triangula $y\,x\,n$ & $N\,n\,P$ cum sint similia, $x\,n.\,y\,x::n\,P.\,P\,N.$ hoc est, $\dot{x}.\,\dot{y}::y.\,\frac{y\dot{y}}{\dot{x}}$, quæ est expressio generalis subnormalis omnium curvarum. Quærendi igitur sunt valores quantitatum y & $\dot{y}$ ex æquatione curvæ, ut substitui eorum loco possint. Assumamus æquationem circuli $aa-xx=yy$, ubi a semidiametrum, & x abscissam a centro circuli incipientem, indicat; hujus æquationis fluxio est

$\overline{a+x}\times\dot{\overline{a-x}}+\overline{a-x}\times\dot{\overline{a+x}}=2y\dot{y}$, &

$\frac{\overline{a+x}\times\dot{\overline{a-x}}+\overline{a-x}\times\dot{\overline{a+x}}}{2y}=\dot{y}$. Sed y eſt $=\sqrt{aa-xx}$, ergo $\frac{\overline{a+x}\times\dot{\overline{a-x}}+\overline{a-x}\times\dot{\overline{a+x}}}{2\sqrt{aa-xx}}=\dot{y}$. Jam quoniam $\dot{\overline{a-x}}$ eſt $=-\dot{x}$, & $\dot{\overline{a+x}}=\dot{x}$; erit $\frac{-a\dot{x}-x\dot{x}+a\dot{x}-x\dot{x}}{2\sqrt{aa-xx}}$ $=\frac{-2x\dot{x}}{2\sqrt{aa-xx}}=\dot{y}$, & $\frac{y\dot{y}}{\dot{x}}=\sqrt{aa-xx}\times\frac{-2x\dot{x}}{2\sqrt{aa-xx}\times\dot{x}}=$ $\frac{-2x\dot{x}}{2\dot{x}}=x$. Ergo abſciſſa x in circulo eſt ipſa ſubnormalis.

§. 129. Porro quadratum normalis Nn eſt æquale quadratis ſubnormalis $N\mathcal{P}$ & ordinatæ Pn ſimul ſumtis, hoc eſt $xx+aa-xx=aa=nN^2$; ergo $a=nN$; hoc eſt, normales omnes in circulo ſunt æquales radio; & vice verſa radii circuli ſunt normales, ideoque perpendiculares ad tangentes in punctis peripheriæ quibus occurrunt.

§. 130. Exemplum hoc eum in finem protuli, ut hujus calculi peritiores videant certitudinem hujuſce methodi in ejuſmodi caſibus, in quibus methodus hactenus uſitata producit eundem effectum: Sed ad methodum Fluxionum inverſam probandam præſens operatio certior eſt, ut jamjam demonſtrabimus.

De Methodo Fluxionum inversa.

§. 131. Hæc methodus docet per operationes contrarias ex Fluxionibus invenire quantitates fluentes; ergo regula generalis hujus methodi hæc est: Indices potentiarum quantitatum fluentium unitate auge, per hos indices auctos simul sumtos & Fluxiones radicum seu primarum potentiarum fluentium divide totam Fluxionem. *E. g.* Sit Fluxio $ax\dot{x}$, cujus quantitas fluens desideratur; auge quantitatis fluentis x exponentem 1 unitate, & erit $ax^2\dot{x}$, per hunc exponentem 2 & Fluxionem $\dot{x}$ divide $ax^2\dot{x}$, & erit $\frac{ax^2}{2}$ quantitas fluens. Ita Fluxionis $x\dot{y}+y\dot{x}=1x\dot{y}+1y\dot{x}=y^0x\dot{y}+x^0y\dot{x}$, quantitas fluens est $\frac{y^1x+x^1y}{2}=\frac{2xy}{2}=xy$. Item Fluxionis $yy\dot{x}+2yx\dot{y}$, quantitas fluens est $\frac{yyx^1+2y^2x}{3}=\frac{3y^2x}{3}=yyx$.

§. 132. Eodem modo quantitas fluens ex ipsa Fluxione invenitur, si Fluxio ipsum terminum Fluxionis exprimit; sin minus, quantitas fluens per Fluxionem ejus tantum ex parte invenitur in illis casibus ubi terminus à quo Fluxionis est quantitas constans. *E. g.* Quantitas fluens Fluxionis $-2x\dot{x}$ est $-xx$, sed posset etiam esse $aa-xx$, secundum methodum ordinariam, qua Fluxionem capiendo quantitas constans pura pror-

sus

ſus rejicitur. Sed per methodum præſentem ex Fluxione quantitas fluens tota recuperatur. Sic Fluxionis $\overline{a-x}\times\overline{a+\dot{x}}+\overline{a+x}\times\overline{a-\dot{x}}$, quantitas fluens eſt $=\frac{\overline{a-x}\times\overline{a+x}^{1}+\overline{a+x}\times\overline{a-x}^{1}}{2}=$ $\frac{aa-xx+aa-xx}{2}=\frac{2aa-2xx}{2}=aa-xx$.

§. 133. Quodſi ergo in Fluxione terminus a quo Fluxionis deeſt, Problema inveniendi quantitatem fluentem eſt indeterminatum; nam Fluxionis $\dot{x}$ quantitas fluens poteſt eſſe aut x ſola, aut quantitate aliqua conſtante ſed indeterminata q aucta vel diminuta, quæ in æquationibus varie poteſt determinari. *E. g.* Sit æquatio Fluxionis $-2x\dot{x}=2y\dot{y}$, æquatio quantitatum fluentium erit $q-xx=yy$. Pone $y=4$, $x=3$, & erit $q-9=16$; ergo $q=25$.

§. 134. Reſtat ut regulam generalem hujus methodi variis exemplis illuſtremus; ſic Fluxionis $x^{m-1}\dot{x}$ quanti asfluens eſt $\frac{1}{m}x^{m}$. Sic *qſt.* hoc eſt, quantitas fluens Fluxionis $m\,x^{\frac{m-n}{n}}\dot{x}$ eſt $=$ $\frac{mx^{\frac{m-n}{n}+\frac{n}{n}}}{\frac{m-n+n}{n}}=\frac{mx^{\frac{m}{n}}}{\frac{m}{n}}=nx^{\frac{m}{n}}=n\sqrt[n]{x^{m}}$.

qſt. $-ny^{-n-1}\times\dot{y}=\frac{-n}{-n}y^{-n}=y^{-n}=\frac{1}{y^{n}}$.

qſt. $\frac{y\dot{x}-x\dot{y}}{yy}=\frac{x}{y}$.

§. 135. Si Fluxio continet radicem ſurdam & Fluxio quantitatis ſub ſigno radicali eſt æqualis

Fluxionit

Fuxioni ante signum radicale, ut in hac Fluxione $2x\dot{x}\sqrt{xx-aa}$, Fluxio quantitatis $xx-aa$ est $2x\dot{x}$, quæ est ipsa Fluxio ante signum radicale; pone $\sqrt{xx-aa}=z$, & erit $xx-aa=zz$; $2x\dot{x}=2z\dot{z}$, per consequens $2x\dot{x}\sqrt{xx-aa}=2zz\dot{z}$, & quantitas fluens erit $\frac{2}{3}z^3$. Substitue valorem quantitatis z^3, & habebis $\frac{2}{3}\overline{xx-aa}^{\frac{3}{2}}=\frac{2xx-2aa}{3}\times\sqrt{xx-aa}$.

§. 136. Eodem modo quantitas fluens invenitur, si Fluxio quantitatis sub signo radicali habet rationem determinatam ad Fluxionem ante signum radicale. *E. g.* In hac expressione $x\dot{x}\sqrt{aa+xx}$, Fluxio $2x\dot{x}$ quantitatis $aa+xx$, est ad Fluxionem $x\dot{x}$ ante signum radicale, ut 2 ad 1. Pone ergo $\sqrt{aa+xx}=z$, & erit $2x\dot{x}=2z\dot{z}$; item $x\dot{x}=z\dot{z}$, & $x\dot{x}\sqrt{aa+xx}=zz\dot{z}$, cujus fluens est $\frac{1}{3}z^3$. Substitue valorem quantitatis z^3 & habebis $\frac{1}{3}\overline{aa+xx}\times\sqrt{aa+xx}=\frac{aa+xx}{3}\times\sqrt{aa+xx}$.

§. 137. Et hæc de Fluxionum calculo pro instituto nostro sufficiant, plura qui cupit, legat aureum libellum *Cl. Dittonis*, *Institution of Fluxions* insignitum. Usum hujus calculi aurei & suo inventore digni in Geometria sublimiori, quæ de curvis agit, deinceps exhibebimus.

PARS II.

AGENS DE

GEOMETRIA.

§. 1. GEometria eſt ſcientia quantitates incognitas ex cognitis ope linearum & figurarum indagandi. Nam licet proprium Geometriæ objectum ſint quantitates in longum latum & profundum extenſæ, quales ſunt lineæ ſive diſtantiæ, ſuperficies & ſolida, ſive corpora; attamen quantitates cujuſcunque generis, licet non ſint extenſæ, eodem modo, ut extenſas, per lineas & figuras exprimere poſſumus. *E. g.* Gravitas corporis non eſt linea, neque ſuperficies, neque ulla figura extenſa; attamen per lineam aut figuram intellectui repræſentari poteſt eodem modo, ut per numeros aut characteres Algebraicos. Ita ſi gravitatem unius libræ exprimis per lineam cujuſcunque longitudinis, gravitas ſex librarum exprimenda eſt per aliam lineam priori ſexies longiorem.

§. 2.

§. 2. Quantitates extensæ in longum, lineæ, in longum & latum, superficies, denique in longum, latum & profundum, corpora sive solida, vocantur.

§. 3. Quantitates metiuntur quantitatibus ejusdem generis; sic lineæ mensura est linea; superficiei superficies, & solidi solidum. Quantitates æquales dicuntur, quæ ad mensuram communem unam eandemque habent rationem. *E. g.* Concipiatur curva *C D* (*Fig.* 9.) in rectam extendi unaque cum recta *A B* applicari ad mensuram *E F*, & utramque ad hanc mensuram habere eandem rationem, nempe hoc loco, ut 4 ad 1; ergo lineæ *A B* & *C D* sunt æquales.

§. 4. Quantitates similes dicuntur, quæ iisdem generationis legibus producuntur. *E. g.* Omnes lineæ rectæ sunt sibi invicem similes, quoniam producuntur eadem lege generationis, viz. motu puncti secundum unam tantummodo directionem; item omnes circuli sunt sibi invicem similes, quia omnes formantur rotatione rectæ circa punctum ejus medium immobile.

§. 5. Quantitates commensurabiles sunt, quæ mensura quadam communi finita exacte mensurari possunt; incommensurabiles vero, quæ nullam habent mensuram communem finitam.

§. 6. Linea describitur motu puncti, qui motus si in eadem directione procedit, linea eo descripta est recta; si vero in directione varia progreditur, linea eo generata dicitur curva. *E g.* Punctum *A* (*Fig.* 3.) lineam rectam *A B* describens, ab ipso termino *A* moveri incipiens, semper eandem directionem versus punctum *B* servat; sed punctum *A* (*Fig.* 4.) lineam curvam *ABCD* describens directione varia procedit, nempe ab *A* in *B* movetur in directione versus punctum *b*, à *B* moveri pergens ad *C*, in directione versus punctum *c*, & tandem à *C* tendens ad *D*, in directione versus punctum *d*. Sic in descriptione curvæ *EF* (*Fig.* 5.) punctum *E* directionem continuo mutat.

§. 7. Linea non est concipienda tanquàm composita ex infinito numero punctorum, nam punctum omni prorsus longitudine & latitudine caret, nec ulla imaginatione, sed tantum intellectu puro, concipi potest. *E. g.* Punctum G (Fig. 3.) lineam *A B* in duas partes dividens, non illud est, quod stilo exaratum vides, sed aliquid prorsus evanescens, quod intellectu puro concipitur tanquam indicium loci, ubi linea in duas partes est divisa. Nam si punctum haberet longitudinem vel minimam, ipsum toti lineæ aliquam partem adimeret, ipsæque partes *A G* & *G B* simul sumtæ non æquarentur toti *A B*. Est igitur linea nihil aliud, nisi indicium tramitis, quo punctum movetur, intellectu puro conceptum, ipsaque omni latitudine caret.

§. 8. Si duo puncta æquali velocitate moventur, lineæ, quas describunt, sunt temporibus proportionales; & vice versa, duo puncta, quæ describunt lineas temporibus proportionales, moventur æquali velocitate. Hinc sequitur lineam rectam esse omnium brevissimam, quæ inter duo puncta duci possunt. Nam concipiantur duo

(Fig.

(Fig. 6.) puncta *A* & *a* ab eodem termino moveri æquali velocitate, evidens est, punctum *A*, quod in linea recta procedit, quoniam directe & continuo ad scopum *B* tendit, citius ad illum pervenire, per consequens breviorem lineam describere, quam punctum *a*, quod in curva *a c b* procedens ab eodem scopo *B* divertitur.

§. 9. Linea recta *A D* ex puncto *A* in lineam *B C* (Fig. 7.) ita ducta, ut ad hanc non inclinet, dicitur ad eandem perpendicularis; & lineæ *A B*, *C D*, (Fig. 8.) quæ ita inter se sitæ sunt, ut ex quocunque puncto unius *C D* in aliam *A B* perpendicularis ducatur, hæ perpendiculares omnes inter sese sint æquales, dicuntur inter se parallelæ. Ideoque duæ parallelæ in nullo puncto se invicem contingere possunt.

§. 10. Supponatur, lineam *A B* (Fig. 10.) per medium divisam in puncto *C*, circa idem punctum ita circumrotari, ut partes ejus *C B*, *C A*, æqualibus temporibus æqualia spatia percurrant, qui motus æquabilis dicitur, evidens est, punctum *B* cum pervenerit in *A*, descripsisse curvam *B b e A* eodem tempore, quo punctum *A* descripsit curvam *A a d B*, cum pervenit ad *B*, & has curvas esse inter se æquales & similes; ipsumque spatium, quod linea recta *C B* percurrit, cum pervenerit in locum *C A*, esse æquale & simile spatio, quod linea recta *C A* percurrit eodem tempore, cum pervenit in locum *C B*; & totam lineam *A B* dimidio hujus temporis descripsisse spatium æquale illi, quod pars ejus dimidia *C B* descripsit toto illo tempore, cum pervenit ad locum *C A*. Ponamus, lineam *A B* pervenisse dimidio illius temporis in locum *e d*; spatium, inter duas rectas *A B*, *e d*, & duas curvas *e b B* & *A a d* comprehensum, æquale est spatio inter lineam rectam *A B* & curvam *A e B* contentam, quod spatium est dimidium illius, quod tota curva *A d B e* includit. Item ipsa spacia *e C B* & *A C d* sunt inter se æqualia & similia; ideoq; quodlibet eorum quadrans ejus, quod tota curva comprehendit. Tandem supponantur duæ rectæ æquales *a b* & *g h*, sese invicem per medium secantes in puncto *C*, circa idem punctum motu æquabili circumrotari ex loco *A B*; & clarum est, punctum *g* describere curvam *A g*, æqualem & similem curvæ *A a*, quod punctum *a* describit eodem tempore, & lineam *C g* percurrere spatium æquale illi, quod linea *C a* percurrit eodem tempore. Item evidens est per hunc motum æquabilem, inclinationem, quam recta *C b* habet ad rectam, *CB* iisdem gradibus decrescere, quo decrescit declinatio, quam habet linea *g C* ab eadem recta *C B*, donec ambæ *g C* & *C b* coalescant in positione *C e*, in qua ad rectam *C B* nec inclinant, nec ab ea declinant.

§. 11. Spatium, quod linea *A B* circumrotando circa medium ejus *C* immobile, quod centrum vocatur, percurrit, cum punctum *B* pervenit in locum *A*, dicitur circulus, & curva *A e B d A*, quam duo puncta extrema lineæ *A B* eodem tempore describunt, dicitur peripheria sive circumferentia circuli; lineæ circumrotatæ *A B*, *g*, *h*, *e d*, dicuntur diametri, & dimidiæ earum partes

tes

tes, ſemidiametri ſive Radii; pars peripheriæ dicitur arcus.

§. 12. Ex ipſa generatione circuli ſequitur, omnes diametros æque ac omnes radios eſſe inter ſe æquales, & quamlibet diametrum dividere circulum in duas partes æquales; item arcum *B b* habere eandem rationem ad totam peripheriam, quam ſpatium *B C b* ad totum circulum.

§. 13. Angulus planus & rectilineus eſt ſpatium indeterminatum inter duas lineas rectas *AB*, *A C*, (Fig. 11.) crura dictas, in puncto *A*, quod vertex vocatur, concurrentes. Hoc ſpatium indeterminatum exprimitur vel una litera *A*, in apice poſita, vel tribus *B A C*, quarum media eſt in apice, & pro lubitu determinari poteſt per arcum *b c*, aut *B C*, utrumq; deſcriptum ex centro *A*, quod eſt anguli apex. Quilibet horum arcuum eſt inſtar menſuræ ipſius anguli; nam indicat, quota pars ſpatium *B AC*, aut *b A c*, pro lubitude terminatum, eſt totius circuli reſpectivi. Quod ſi igitur totum circulum quemcunq; in 360 partes æquales, gradus dictos, per totidem radios diviſum concipis, ac earum partium unamquamq; denuo in 60 partes æquales, minuta prima dictas, harumq; quamlibet iterum in 60 æquales, minuta ſecunda vocatas, & ſic in infinitum; numerus graduum & minutorum, quem arcus *b c*, aut *B C*, continet, magnitudinem anguli indicat. Ex quo apparet, magnitudinem anguli non æſtimari debere ex longitudine linearum, intra quas continetur, ſed ex relatione, quam arcus *a c*, *A C*, habent ad circulos ſuos reſpectivos, quæ utrobiq; eſt æqualis:

nam concipiatur, lineam *A B* ex loco *A C* circa punctum immobile *A* rotari; & clarum est, punctum *B* eodem tempore absolvere totam circuli sui peripheriam, quo punctum *b*, & eodem tempore punctum *B*, describere eandem partem peripheriæ suæ, nempe arcum *B C*, quo punctum *b* describit partem suæ peripheriæ nempe arcum *b c*. Eodem igitur modo, quo una eademq; fractio per diversos numeros exprimi potest, in omnibus vero ratio numeratoris ad denominatorem est eadem, eodem inquam modo unus idemq; angulus per arcus diversæ magnitudinis potest determinari, quorum tamen quilibet ad suam peripheriam unam eandemq; habet rationem.

§. 14. Cum dicimus arcum *BC* aut *bc* esse instar mensuræ anguli, eo ipso non affirmamus, eum esse ipsam mensuram, nam arcus est linea, & angulus est spatium indeterminatum, quæ sunt duo diversa genera; est ergo anguli mensura etiam spatium indeterminatum, eodem modo, ut angulus, per rotationem lineæ indeterminatæ circa punctum immobile generatum, quale spatium est ipse circulus per lineam indeterminatæ longitudinis descriptus: sed quoniam angulus, qui est pars circuli indeterminati, habet ad totum circulum eandem rationem, quam arcus quilibet *B C*, aut *b c*, habet ad totam peripheriam; ergo arcus ipse rationem quam angulus habet ad circulum exponit, ideoq; instar mensuræ esse dicitur. Quodsi igitur angulum e. g. 30 gradus continere dicimus, nullam spatii aut areæ determinatæ quantitatem, sed tantum rationem ad circulum indeterminatæ

mag-

magnitudinis indicamus, ita ut 30 gradus significent $\frac{30}{360}$ mas totius circuli; cum vero area circuli velut totius ſit indeterminata, & ipſa area anguli tanquam partis eſt indeterminata.

§. 15. (Fig. 12.) Angulus *BAC*, inter perpendicularem *AB* & ſubjacentem *A C* contentus, dicitur rectus; (Fig. 13.) angulus *D E F*, inter lineam *E F* & ad hanc inclinatam *D E*, acutus; & deniq; angulus (Fig. 14.) *G H I*, inter lineam *H I* & ab ea declinatam *G H*, obtuſus vocatur.

§. 16. (Fig. 15.) Duæ lineæ *AB*, *CD*, ſeinvicem in puncto *E* ſecantes, quatuor formant angulos, quorum Linæ ſuper eandem rectam, *e. g.* angulus *AEC* & *CEB* ſuper eandem rectam *AB*, dicuntur contigui; bini ſibi invicem oppoſiti, ut *AEC* & *BCD* vocantur verticales ſeu per verticem oppoſiti.

§. 17. Si per duas parallelas (Fig. 16.) *AB*, *CD*, linea *E F* ducitur, anguli bini, infra vel ſupra duas parallelas ad idem latus lineæ *E F* ſiti, dicuntur alternatim oppoſiti, *e. g.* anguli *n* & *m*, quorum unus *n* eſt ſupra parallelarum ſuperiorem *A B*, alter *m* ſupra alteram *C D*, uterq; autem ad latus ſiniſtrum lineæ *E F*. Bini anguli intra duas parallelas, quorum unus eſt infra ſuperiorem, alter ſupra inferiorem parallelarum ad diverſa latera lineæ *E F* ſitarum, vocantur alterni, ſeu alternantes interni, quales ſunt anguli *o* & *m*, quorum prior *o* eſt infra parallelam ſuperiorem *AB* ad dextram lineæ *E F*, alter *m* eſt ſupra

paral-

parallelam inferiorem *C D* ad sinistram lineæ *E F* uterq; vero intra duas parallelas. Bini anguli extra parallelas ad diversa latera lineæ *E F*, e. g. *s* & *r*, dicuntur alternantes externi. Tandem bini anguli intra parallelas ad idem latus rectæ *E F* e. g. *o*, *p*, interni ad idem latus, & bini extra parallelas *s*, *r*, externi ad idem latus vocantur.

§. 18. Ex eo, quod de generatione circuli & anguli diximus, §. 10. *seqq.* sequentes propositiones immediate eliciuntur.

Prop. 1. Angulus rectus est quadrans circuli, sive continet 90 gradus; angulus acutus est minor, & obtusus major, quadranti circuli; quare ille numerum graduum 90 minorem, hic vero majorem, continet.

Prop. 2. Duo anguli contigui, e. g. *n* & *s* simul sumti æquales sunt dimidio circuli, sive duobus angulis rectis, continentq; 180 gradus.

Prop. 3. Duo anguli verticales, e.g. *n* & *o* sunt inter se æquales; nam linea indeterminata *E F*, e loco *A B* circa punctum immobile *s* rotata, utrinque æqualia spatia indeterminata percurrit.

Prop. 4. Duo anguli alternatim oppositi, e. g. *n* & *m* sunt inter se æquales; nam lineæ parallelæ *A B*, *C D*, e loco *E F* æquali motu circa puncta *s* & *p* rotatæ spatia æqualia absolverunt, cum pervenere ad positionem *A B* & *C D*, ipsæq; sunt inter se parallelæ: nam *A s* & *s B*, item *C p* & *p D* æquabiliter motis, *C p* tantum recedit ab, aut accedit ad *A s*, quantum *p D* recedit ab, aut accedit ad *B s*.

Prop.

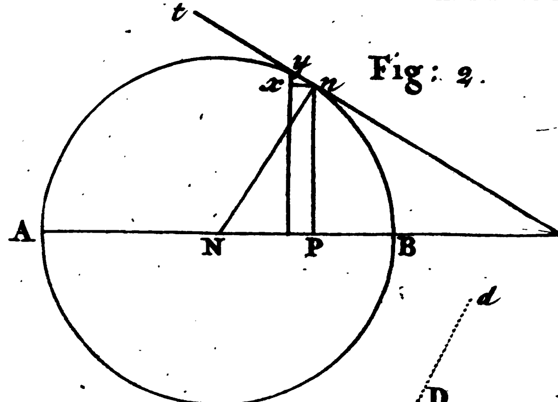


Fig: 2.

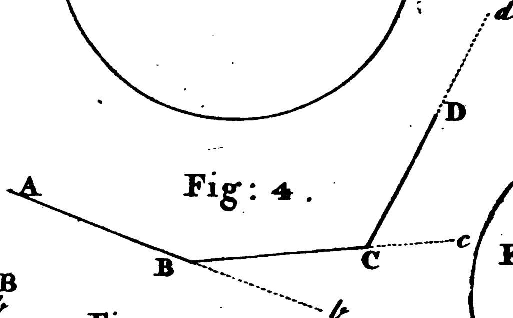


Fig: 4.

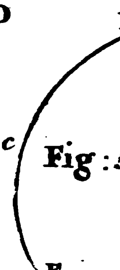


Fig: 5

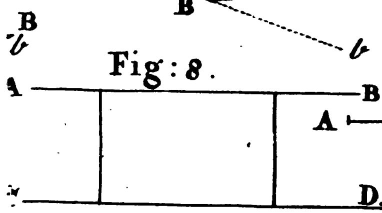


Fig: 8.

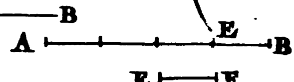
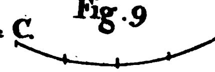


Fig. 9



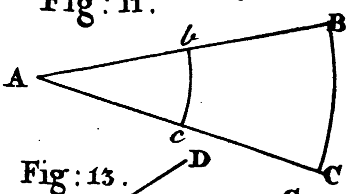


Fig: 11.

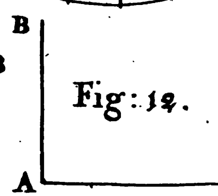


Fig: 12.

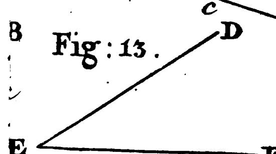


Fig: 13.

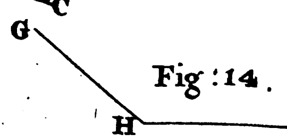


Fig: 14.

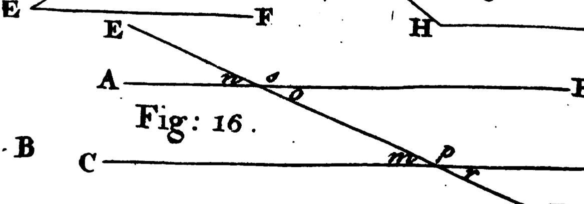


Fig: 16.

Prop. 5. Duo anguli alternantes interni, e. g. *o* & *m* ſunt inter ſe æquales, ex eodem fundamento.

Prop. 6. Duo anguli interni ad idem latus, e. g. *o* & *p*, item duo externi ad idem latus, ut *s* & *r*, ſimul ſumti æquantur dimidio circuli, ſive duobus angulis rectis: nam quia anguli alternatim oppoſiti *o* & *r* ſunt inter ſe æquales, ſi utriq; angulus idem *p* addatur, ſummæ erunt æquales; at vero anguli contigui *p* & *r* ſimul ſumti æquantur ſemicirculo; ergo & anguli interni ad idem latus *o* & *p*. Eodem modo probatur, angulos duos externos ad idem latus *s* & *r* ſimul ſumtos æquari ſemicirculo, ſive duobus angulis rectis.

§. 19. Supponatur, lineam rectam *A B* (Fig. 17.) ex poſitione priori *A B* moveri motu æquabili, ita ut poſitioni priori *A B* ſemper maneat parallela, & eodem tempore punctum *B* progredi motu itidem æquabili verſus lineam *A C*, & tandem coincidere in puncto *C*, cum linea *A B* venerit in locum *C D*; dico punctum *B* motu ex duobus compoſito ferri, quorum unus eſt verſus lineam *C D* in directione *A C*, alter verſus lineam *A C* in directione *A B*, & per hunc motum compoſitum deſcribere rectam *B C* motu itidem æquabili: Nam ſupponatur punctum *B* primo temporis momento hoc motu compoſito lineam *B c* producere, evidens eſt idem punctum eodem motu compoſito ſecundo temporis momento producere lineam *c e* æqualem priori *c B*; jam ſupponatur linea *c B* evaneſcens, ſeu tanquam naſcens, & directio, compoſita ex directione *B A* & *AC*, ſecundum rectam *B C*; eandem directionem reti-

retinebit punctum *B* cum pervenerit in locum *c*; nam eædem causæ in iisdem circumstantiis eosdem producunt effectus: ergo quoniam punctum *B* motu æquabili in eadem semper directióne procedit, non potest non lineam rectam producere.

§. 20. Ponatur, lineam directricem *A C* ad lineam *A B*, quam basin appellabimus, habere certam rationem cognitam, & duas hasce lineas continere angulum certum *C A B*, itidem cognitum, lineamque *A B* motu ejusmodi parallelo secundum directionum *A C* ferri ita, ut æquabiliter decrescat, donec in puncto *C* penitus evanescat; dico spatium, seu aream, quam linea decrescens *A B* percurrit, esse triangulum rectilineum, & omnia spatia, quæ iisdem legibus generantur, esse triangula huic similia. *E. g.* Supponatur in triangulo *c a B*, *c a* eandem habere rationem ad *a B*, ut *C A* ad *A B* in triangulo *C A B*, & lineam *a B* moveri motu parallelo & æquabili, ita ut æquabiliter decrescat, donec in puncto *c* prorsus evanescat; dico figuram *c a B* hoc modo generatam esse triangulum simile triangulo *C A B*, & nulla re differre ab eo nisi magnitudine: nam linea *c B* eandem habet inclinationem ad directionem *c a* & basin *a B*, quam linea *C B* habet ad *C A* & *A B*, per consequens angulus *A B C* æqualis est angulo *a B c*, & angulus *A C B* æqualis angulo *a c B*, & latus *C B* habet eandem rationem ad *C A* & *A B*, quam latus *c B* habet ad *c a* & *a B*. Hinc sequitur,

Prop.

Prop. 7. Si in duobus triangulis omnes tres anguli separatim sumti sunt æquales, omnia tria latera sunt proportionalia: & vice versa, si omnia tria latera sunt proportionalia; omnes tres anguli separatim sumti sunt æquales: Item si duo latera sunt proportionalia, & unus angulus æqualis; tertium latus est etiam proportionale, & duo reliqui anguli seorsim sumti sunt æquales.

Prop. 8. Si duo triangula habent aut duos angulos æquales, & unum latus, angulo æquali adjacens, æquale; aut si habent duo latera æqualia, & unum angulum, lateri æquali adjacentem, æqualem; aut tandem si habent omnia tria latera æqualia: tota triangula sunt sibi invicem similia & æqualia. *E. g.* supponatur in duobus triangulis *CAB* & *CBD* angulus *DBC* æqualis angulo *ACB*, angulus *DCB* æqualis angulo *CBA*, & latus *DB*, angulo *DBC* adjacens, æquale lateri *AC*, angulo æquali *ACB* adjacenti; dico, duo hæc triangula esse sibi invicem similia & æqualia.

§. 21. Triangula rectilinea dividuntur respectu angulorum in tria genera, 1) Rectangula, si habent unum angulum rectum, 2) Obliquangula, si habent unum angulum obliquum, 3) Acutangula, si habent omnes tres angulos acutos. Respectu laterum itidem in tria genera distinguuntur, nimirum 1) Æquilatera, quæ habent omnia tria latera æqualia, 2) Æquicrura, Græce Isosceles, quæ habent duo latera, crura dicta, æqualia, sed tertium latus, quod basin facit, inæquale, 3) Scalena, in quibus omnia tria latera

sunt

ſunt inæqualia. Et hæc 6 genera triangulorum infinitum numerum ſpecierum ſub ſe comprehendunt; nam omnia triangula, quæ eiſdem legibus generantur, hoc eſt ſimilia, ſpeciem peculiarem conſtituunt: at vero directricis ad baſin ratio æque ac inclinatio, vel declinatio ab ea, infinitis modis variari poteſt; igitur pro omnibus ſpeciebus nomina fingere, infinitus labor &, ut mihi quidem videtur, inutilis foret; quamobrem, hoc miſſo, telum operis noſtri texere pergemus, & ex hactenus præmiſſis tanquam principiis reliquas propoſitiones deducemus.

§. 22. *Prop.* 9. In quovis triangulo retilineo omnes tres anguli ſimul ſumti æquales ſunt dimidio circuli, ſive duobus angulis rectis. Ducatur enim cum baſi (Fig. 18.) *AB* trianguli *ABC* parallela *DE*; certum eſt angulos alternos *o* & *A* eſſe inter ſe æquales, item angulos alternos *n* & *B*. At vero angulis *o* & *n* ſi additur angulus *m*, ſumma eorum equatur dimidio circuli, ſive duobus angulis rectis: ergo ſi angulis *A* & *B*, æqualibus angulis *o* & *n*, idem angulus *m* additur, & horum ſumma erit duobus angulis rectis æqualis. Eadem demonſtratio valet in omnibus triangulis rectilineis. Hinc ſequitur

Corollarium 1. Inter tres angulos trianguli rectilinei nonniſi unum eſſe poſſe angulum rectum aut obtuſum.

Cor. 2. Duobus angulis in triangulo rectilineo cognitis, & tertium eſſe cognitum; eſt enim complimentnm ad dimidium Circuli ſive 180 gradus.

Cor. 3.

Coroll. 3. Si in duobus triangulis rectilineis duo anguli sunt æquales, & tertium æqualem esse necessum est.

Coroll. 4. Si in triangulo quodam rectilineo unus angulus est datus, summa duorum reliquorum facile cognoscitur; est enim complementum ad 180 gradus.

§. 23. *Prop.* 10. Si in triangulo quovis rectilineo $m\ n\ r$ (Fig. 19.) unum latus $m\ r$ prolongatur, angulus externus o æqualis est duobus internis oppositis m & n simul sumtis. Nam omnes tres anguli interni m, r, n, simul sumti æquales sunt dimidio circuli; igitur si quantitatibus æqualibus $m+n+r$ & $r+o$, quantitatem æqualem r aufers, quantitates residuæ $m+n$ & o sunt itidem æquales. *Q. E. D.*

§. 24. *Prop.* 11. In triangulo isosceli sive æquicruro (Fig. 20.) acb duo anguli ad basin a & b sunt æquales. Dividatur enim basis ab in duas partes æquales in d, & ducatur ex c linea recta cd, hæc ipsa triangulum $a\ c\ b$ in duo triangula $c\ a\ d$ & $c\ d\ b$, sibi invicem similia & æqualia, dividit; habent enim omnia tria latera inter se æqualia;. igitur anguli a & b, inter æqualia latera comprehensi, sunt inter se æquales. *Q. E. D.*

Coroll. 1. Quoniam anguli o & m simul sumti æquales sunt duobus rectis, & iidem separatim accepti sunt inter se æquales; igitur quilibet eorum est angulus rectus, & linea $c\ d$ est perpendicularis ad basin $a\ b$; hoc est, si in triangulo æquicruro basis dividitur in duas partes æquales, & ex puncto divisionis d ducitur recta $d\ c$ versus apicem

apicem trianguli *c*, hæc ipsa est perpendicularis ad basin *a b*.

Coroll. 2. Si ex apice *c* trianguli æquicruri ducitur recta perpendicularis ad basin *a b*, hæc ipsa perpendicularis basin *a b* & angulum *a c b* in duas partes æquales dividit.

Coroll. 3. In triangulis æquilateris omnes tres anguli sunt inter se æquales, & quilibet eorum continet 60 gradus.

§. 25. *Prop.* 12. Si in circulo quovis construis duos angulos, unum ad centrum *o*, alterum ad peripheriæ punctum quodvis *b*, ita tamen, ut uterque uni eidemque arcui *a c* insistat; dico, angulum ad centrum *o* duplum esse anguli *b* ad peripheriam. Construantur enim 1) ita, ut alterum crus utriusq; coincidat in una recta *a b*, (Fig. 21.) quoniam rectæ *o c* & *o b* sunt radii circuli, eaque propter inter se æquales, triangulum *o c b* est æquicrurum, & anguli *c* & *b* inter se æquales: At vero angulus externus *o* æqualis est duobus internis oppositis *c* & *b* simul sumtis; igitur angulus *o* æqualis est duplo anguli *c*.

2) Si duo crura anguli ad peripheriam, (Fig. 22.) *b a* & *b c*, includunt duo crura anguli ad cenetrum, *o a* & *o c*, ducatur per *b* & *o* recta *b o d*, & jamjam demonstratum est, angulum *d o c* esse duplum anguli *d b c*, item angulum *a o d* duplum anguli *a b d*; igitur anguli *d o c* & *a o d* simul sumti, hoc est angulus *a o c*, duplum est anguli *a b c*, qui est summa angulorum *a b d* & *d b c*.

3) Si crus unius *b c* crus alterius *a o* (Fig. 23.) secat, ducatur recta *b e* per punctum *o*, & primo casu

casu demonstratum est, angulum *a o e* esse duplum anguli *a b e*, item angulum *c o e*, partem illius, esse duplum anguli *c b e*, partis hujus; igitur pars altera *a o c* prioris est etiam duplum partis alterius *a b c* posterioris.

Coroll. 1. Omnes anguli ad peripheriam circuli uni eidemque arcui, aut æqualibus arcubus, insistentes sunt inter se æquales; & vice versa, anguli æquales ad peripheriam arcui uni eidemque, aut arcubus æqualibus, insistunt.

Coroll. 2. Angulus ad peripheriam dimidium graduum continet arcus, cui insistit: Nam angulus ad centrum *o* totidem gradus capit, quot arcus peripheriæ, cui insistit *a c*.

Coroll. 3. Angulus ad peripheriam, insistens dimidio totius peripheriæ sive diametro, est angulus rectus: Nam continet dimidium graduum semipheriæ, hoc est, quartam partem totius peripheriæ, sive 90 gradus.

§. 26. *Prop.* 13. In quovis circulo chordæ arcuum æqualium sunt inter se æquales. Chorda seu subtensa dicitur recta *B C* (Fig. 24.) jungens extremitates arcus *B C*. Supponatur arcus *B C* & *A B* esse inter se æquales, & ducantur ex punctis *A*, *B*, *C*, radii *A D*, *B D*, *C D*, hi omnes sunt inter se æquales & anguli *o* & *m* propter arcus æquales *A B* & *B C* sunt etiam inter se æquales; igitur duo triangula *A D B* & *B D C*, habentia inter se duo latera & unum angulum æqualia, sunt sibi invicem similia & æqualia; per consequens latus *B C* est æquale lateri *A B*.

§. 27. *Prop.* 14. Linea perpendicularis *D E* ad chordam (Fig. 25.) *A B*, eamque dividens in puncto *F*, transit per centrum circuli *C*, sive est circuli diameter, dividitque arcum *A D B* in duas partes æquales in puncto *D*. Ducantur enim ex punctis *D* & *E*, ubi perpendicularis *D F E* peripheriæ circuli occurrit, rectæ *D B*, *E B*, versus unum chordæ extremum *B*, & *D A*, *E A*, versus alterum ejus extremum *A*; & constat per *Coroll.* 2. *Prop.* 11. perpendicularem *D E* dividere angulos *A D B* & *A E B* in duas partes æquales; igitur anguli *m* & *r* æquales sunt angulis *o* & *n*; per consequens & angulus *D B E* æqualis est angulo *D A E*: Duo vero anguli æquales ad peripheriam circuli insistunt arcubus æqualibus per *Coroll.* 1. *Prop.* 12. Ergo perpendicularis *D E* dividit totam peripheriam *A D B E* ipsumque circulum in duas partes æquales, per consequens est ejus diameter; & anguli ad peripheriam *n* & *r*, cum sint inter se æquales, æqualibus arcubus *A D* & *D B* insistunt; ergo eadem perpendicularis *D E* arcum *A B*, in duas partes æquales dividit in puncto *D*.

§. 28. *Prop.* 15. Si ex puncto quovis *A* (Fig. 26.) extra peripheriam circuli ducantur duæ rectæ eam secantes *A B* & *A C*; dico has esse inter se in ratione reciproca partium *A D*, *A E*, intra punctum *A* & peripheriam, hoc est, *A C* est ad *A B*, ut *A D* est ad *A E*. Ducantur enim rectæ *B E* & *C D*, & constat angulos *B* & *C*, ambos ad peripheriam & uni eidemque arcui *D E* insistentes, esse inter se æquales; ergo duo triangula

A

A B E & *D A C*, habentes angulos *B* & *C* æquales, & angulum *A* inter se communem, habent & tertium angulum æqualem; igitur sunt sibi invicem similia, & latera æqualibus angulis adjacentia inter se proportionalia, hoc est, *A C*. *A D* : : *A B*. *A E*, & transponendo terminos intermedios *A C*. *A B* : : *A D*. *A E*.

Coroll. 1. Si una harum linearum secat peripheriam in punctis *E* & *C*, altera vero *A d* eandem tangit in puncto *d*, hæc tangens est media proportionalis intra totam secantem *A C* & partem ejus *A E*; nam hoc casu *B D* prorsus evanescit, & est $\div$ *A C*. *A d*. *A E*, & *A C* x *A E* = quadr. *A*. *d*.

§. 29. *Prop.* 16. Tangens *B D* ad circulum *E C F* (Fig. 27.) in puncto *C* est perpendicularis ad radium *A C*. Ducantur enim ex punctis diametri extremis *F* & *E* rectæ *F C* & *E C*; & erit $\div$ *F B*. *C B*. *E B* per *Coroll.* præc. igitur triangula *F B C* & *C B E*, cum habeant bina latera *F B*, *B C*, & *B C*, *E B*, proportionalia, & angulum *s* communem inter se, ipsa sunt sibi invicem similia; per consequens angulus *p* æqualis est angulo *r*; sed anguli *r* & *s* simul sumti æquales sunt angulo *m*, & anguli *p* & *s* simul sumti æquales angulo *t*, per *Prop.* 10. angulusque *t* æqualis angulo *o*, per *Prop.* 11. quare anguli *m* & *o*, sunt æquales; per consequens æqualibus angulis uno eodemque angulo addito summæ $m+n$ & $n+o$ sunt æquales: Sed anguli $n+o$ æquantur angulo recto, per *Coroll.* 3. *Prop.* 12; quare & anguli *m* & *n* simul sumti: Igitur radius *A C* est ad tangentem *B D*, vel hæc ad illum perpendicularis. *Q. E. D.*

Coroll. Duæ tangentes *C B* & *B D*, (Fig. 28.) inter puncta tactus *C* & *D* & punctum concursus *B*, sunt æquales. Ducantur enim radii *A C* & *A D*, ac recta *A B*; triangula *A C B* & *A D B*, quia habent angulos rectos *C* & *D*, item latera *A C* & *A D* æqualia, latusque *A B* inter se commune, sunt sibi invicem similia & æqualia; quare *C B* æqualis est *D B*.

§. 30. Si linea quædam recta secundum directionem alius rectæ motu priori positioni parallelo movetur, spatium quod recta ita mota percurrit parallelogrammon vocamus, hoc est, superficiem planam habentem bina latera sibi invicem opposita parallela; in specie si directrix *AC* (Fig. 29.) ad basin *AB* est perpendicularis, & cum ea ejusdem longitudinis, planum descriptum dicitur quadratum; si directrix ad basin est perpendicularis, & ei inæqualis, rectangulum oblongum; si directrix ad basin est inclinata, vel ab ea declinat, & ejusdem cum ea est longitudinis, rhombus; si denique directrix ad basin inclinat, vel ab ea declinat, & longitudine differt, rhomböides nominatur. Ex quibus definitionibus apparet, omnia quadrata sibi invicem esse similia, & ex rectangulis oblongis ea, quorum directrix ad basin eandem habet rationem; ex rhombis ea, quorum directrix ad basin eandem habet positionem, sive cum ea eundem angulum includit; denique ex rhomböidibus ea, quorum directrix ad basin eandem habet positionem æque ac rationem.

§. 31.

§. 31. *Prop.* 17. Quodvis parallelogrammon per lineam diagonalem *C B* in duo triangula ſibi invicem ſimilia & æqualia dividitur. Nam duo triangula *A B C* & *C B D*, habentia bina latera *A B*, *C D*, & *A C*, *B D*, inter ſe æqualia, tertiumque latus *C B* inter ſe commune, ſunt ſibi invicem ſimilia & æqualia.

Coroll. Igitur quodvis triangulum rectilineum eſt dimidium parallelogrammi, cujus directrix ad baſin habet eandem poſitionem & rationem.

§. 32. *Prop.* 18. Parallelogramma æquales longitudines & latitudines, ſive quod idem eſt, æquales baſes & altitudines, habentia, ſunt interſe æqualia. Altitudinem ſive latitudinem perpendicularis quævis *B D* (Fig. 30.) inter baſin *C D* & latus ei oppoſitum parallelum *E F* ducta determinat. Sint enim duo parallelogramma *C D B A* & *C D F E*, quorum prius eſt rectangulum oblongum, & alterum rhomböides, utrumque eandem baſin *C D* & eandem altitudinem *B D* habens. Hæc duo parallelogramma habent planum *CDBE* inter ſe commune, & triangulum *B D F*, quod complet rhombóides *C D F E*, æquale & ſimile eſt triangulo *A C E*, quod complet rectangulum *C D B A*, quia habet latera duo *D F* & *D B*, æqualia lateribus alterius *C E* & *C A*, & angulum *D B F* æqualem angulo *C A E*; igitur duo iſta triangula uni eidemque plano *C D B E* addita faciunt tota parallelogramma *C D F E* & *C D B A* inter ſe æqualia.

Coroll. Quoniam triangula parallelogrammorum sunt dimidia, ergo & triangula æquales bases & altitudines habentia sunt inter se æqualia.

§. 33. *Prop.* 19. Planum sive area parallelogrammi cujusvis producitur, si ejus longitudo per latitudinem multiplicatur. Quia enim area parallelogrammi rectanguli *D B* (Fig. 31.) generatur per motum parallelum lineæ *A B* secundum directionem *B C*, linea *A B* est constans, hoc est, nec augescit nec decrescit, *B C* vero est in continuo fluxu, seu semper augescens. Ponatur ergo $A\,B=a$, & $BC=x$, erit Fluxio ejus, sive velocitas, qua punctum *B* movetur describendo lineam $B\,C=\dot{x}$, quæ multiplicata per quantitatem *a* producit $a\,\dot{x}$, momentum seu areolam *A b*, quam linea *A B* describit primo momento temporis. Concipiatur illud momentum temporis evanescens, & ipsa areola *A b* evanescet, & erit in ipso initio generationis suæ, per consequens ut ipsa velocitas seu Fluxio, cujus quantitas fluens, seu area *A C*, est $a\,x$, hoc est longitudo *A B* multiplicata per latitudinem *B C*. *E. g.* Dividatur rectanguli *D B* longitudo *A B*, æque ac latitudo *B C*, in partes æquales, & ducantur per puncta sectionis *B C* parallelæ *a b* cum longitudine *A B*, hæ ipsæ rectangulum *D B* in quatuor rectangula æqualia divident; ducantur itidem per puncta *c*, *c*, &c. rectæ *A B* parallelæ *c d* cum latitudine *A D*, hæ ipsæ quodvis horum 4 rectangulorum in 8 quadrata æqualia divident, per consequens totam aream rectanguli in 32, quod est productum

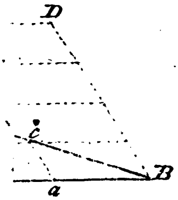


Fig. 18.

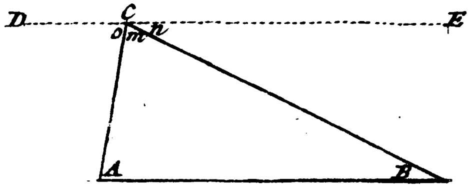


Fig. 20.

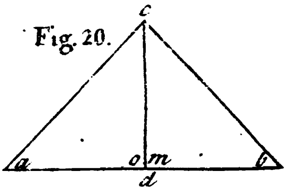
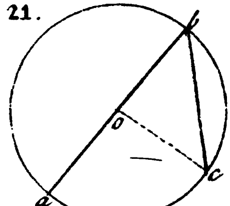


Fig. 21.



g. 23.

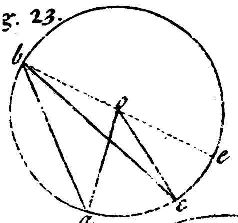


Fig. 24.

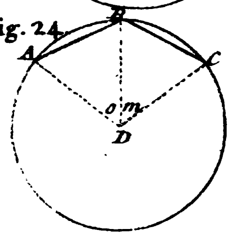


Fig. 25.

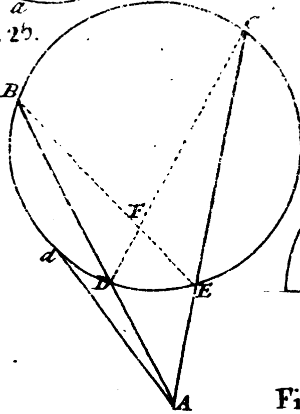
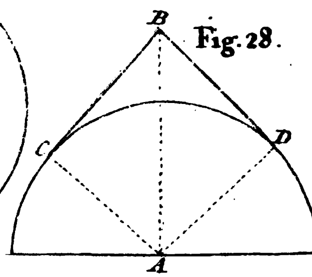


Fig. 28.



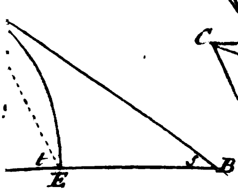
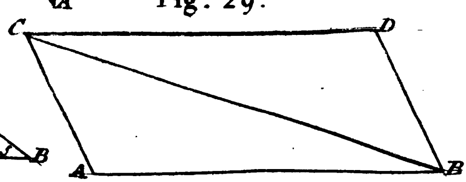


Fig. 29.



tum longitudinis 8 in latitudinem 4. Et quoniam omnia parallelogramma æquales longitudines & latitudines habentia, ſunt inter ſe æqualia, igitur area eorum uno eodemque modo producitur, ſcil. multiplicando longitudinem per latitudinem.

Ad aream parallelogrammi numeris exprimendam opus eſt longitudinem æque ac latitudinem ſcalæ certæ ſeu menſuræ applicare, numerumque partium æqualium, in quas diviſa concipitur determinare. Scala eſt linea recta in partes æquales diviſa, cujus exemplum figura 32 eſt, in qua tota linea *A B* in quatuor æquales partes eſt diviſa, & quarta pars *A i* in decem itidem æquales, harumque decimarum quævis in 10 alias æquales per diagonales *i*. 10, 10. 20; &c. Nam quoniam triangula *i* 1. *o*. & *e* 10. *i* ſunt ſimilia, *i e* habet ad *e* 10. eandem rationem ac *i* 1 ad 1. o, ſed *i* 1 eſt decima pars lineæ *i e*, ergo & 1. *o* eſt decima pars lineæ 10. *e*, ſic 2 *s* continet duas decimas, &c. Igitur tota linea in 400 partes æquales hoc modo eſt diviſa. Sed hæc diutius proſequi a propoſito noſtro alienum eſt.

Coroll. 1. Quoniam triangulum eſt dimidium parallelogrammi, igitur dimidium producti longitudinis in latitudinem eſt area trianguli, ſive productum longitudinis in dimidium latitudinis, ſive denique latitudinis in dimidium longitudinis. Sit enim longitudo a, latitudo b, productum ex a in b eſt $a\,b$ quod diviſum per 2 facit $\frac{a\,b}{2}$ aream trianguli, eadem area producitur, ſi a ducitur in $\frac{b}{2}$, aut b in $\frac{a}{2}$.

Coroll. 2. Parallelogramma æque ac triangula easdem longitudines habentia sunt inter se ut eorum latitudines, & si latitudines eorum sunt æquales, sunt inter sese ut eorum longitudines. Sit enim longitudo duobus parallelogrammis communis *a*, sed latitudo unius *b*, & alterius *c*, erit area prioris *a b*, & posterioris *a c*; est vero *a b* ad *a c* ut *b* ad *c*.

Coroll. 3. Ratio parallelogrammorum æque ac triangulorum est composita ex rationibus longitudinum & latitudinum. *E. g.* Sit longitudo unius parallelogrammi *a*, & alterius *b*, & latitudo prioris *c*, posterioris *d*, erit prioris parallelogrammi area *a b*, posterioris *c d*; igitur ratio prioris ad posterius ut *a b* ad *c d*, quæ ratio composita est ex ratione longitudinum *a* ad *c*, & latitudinum *b* ad *d*.

§. 34. *Prop.* 20. Duo triangula, quorum latera circa angulos æquales sunt in ratione reciproca sunt inter se æqualia; & vice versa duorum triangulorum æqualium latera circa angulos æquales sunt inter se in ratione reciproca. *E. g.* Sint duo triangula *A B C* & *A D E* (Fig. 33.) habentia angulos *r* & *s* inter se æquales, latera vero circa hos angulos in ratione reciproca, hoc est, *AD*. *AC* : : *AB*. *AE*; dico hæc duo triangula esse inter se æqualia. Ducantur enim ex punctis *C* & *D* perpendiculares *C F*, *D G*, ad bases *A B*, *A E*, & erunt triangula *A F C* & *A G D* similia, per consequens latera circa angulos æquales proportionalia, hoc est *A D*. *A C* : : *D G*. *CF*; igitur *A B*. *A E* : : *D G*. *C F*, & ductis in se duobus

obus terminis extremis & duobus mediis facta sunt æqualia, hoc est, $AB \times CF = AE \times DG$. Sunt vero triangula ABC & AED horum factorum dimidia, ergo & ipsa inter se æqualia, *Q. E. D.*

§. 35. *Prop.* 21. Ducantur duæ chordæ BD & FG (Fig. 34.) se invicem secantes in puncto C; dico parallelogrammon $FC \times CG$ æquale esse parallelogrammo $BC \times CD$. Ducantur enim rectæ DF, GB, & erunt triangula FCD & CBG, sibi invicem similia, habent enim angulos ad verticem C oppositos, item angulos ad peripheriam B & F uni eidemque arcui DG, nec non angulos D & G arcui FB insistentes, æquales; ergo $BC. CF :: CG. CD$ & ductis in se invicem duobus extremis & duobus mediis, $BC \times CD = CF \times CG$. *Q. E. D.*

§. 36. Plana quadrilatera, quæ latera opposita non habent æqualia, dicuntur trapezia. Reliqua plana rectilinea generali nomine poligona vocantur, dividunturque in regularia & irregularia. Illa habent omnia latera omnesque angulos inter se æqualia; hæc vero minus: Utraque a numero laterum peculiaria nomina sortiuntur, viz. Pentagona, Hexagona, Heptagona, &c. si 5, 6, 7, &c. lateribus comprehenduntur.

§. 37. Omnia polygona rectilinea irregularia, ductis diagonalibus, in totidem triangula dividi possunt, quot habent latera, demtis dubuos, quorum areæ in unam summam collectæ constituunt totum polygonum. *E. g.* Polygonum $ABCDE$, (Fig. 35.) ductis diagonalibus AC, AD in tria triangula

triangula dividitur, sed latera polygoni sunt 5; at 5 demtis duobus faciunt 3.

Polygona regularia, ductis ex omnibus angulis lineis rectis ad centrum eorum in totidem triangula æqualia & similia dividuntur, quot habent latera. *E. g.* Hexagonum *ABCDEF*, ductis (Fig. 36.) ex omnibus angulis lineis rectis ad centrum *o*, in 6 triangula æqualia & similia dividitur; nam omnes eorum bases *A B*, *B C*, &c. & omnia crura *A O*, *B O*, *C O*, &c. sunt inter se æqualia. Area igitur totius polygoni producitur, si area unius illorum triangulorum in numerum laterum polygoni ducitur. Differentia vero areæ polygoni ab area circuli, cui inscribitur, sunt areolæ inter latera polygoni & arcus circuli contentæ. Dividatur quilibet arcus in duos æquales, *e. g.* arcus *A F* in *A b* & *b F*, & ducantur rectæ *A b*, *b F*, quæ sunt duo latera polygoni dodecagoni, hujus area propius ad æqualitatem circuli accedit, differt enim illa ab hac areolis inter rectas & arcus *A b*, *b F*, contentis, quæ simul sumtæ minores sunt areolis inter rectas & arcus *A F* contentis, viz. triangulis *F b A*. Quo major ergo numerus laterum polygoni est, eo propius ad æqualitatem circuli accedit, ita ut ipsi plane æqualis evadat, cum numerus laterum ejus est infinitus, tum enim ipsa latera cum arcubus coincidunt, ipsique arcus infinite parvi a rectis non differunt. Quamobrem

Prop. 22. Circulus concipi potest ut polygonum infinitilaterum, cujus latera sunt numero & parvitate infinita, ipsique arcus peripheriæ: potest

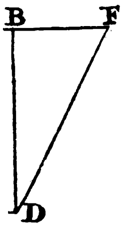
potest ergo circulus in infinitum numerum triangulorum radiis totidem dividi, quorum omnium bases simul sumtæ faciunt totam peripheriam, & altitudines eorum sunt ipsi radii; igitur area totius circuli producitur, si peripheria tota in dimidium radii aut radius totus in dimidium peripheriæ ducitur.

Quoniam vero in omnibus circulis ratio diametri ad peripheriam una eademq; est, hinc liquet circuli cujusvis peripheriam, data ejus diametro, per regulam trium determinari posse; si semel hæc ratio cognita est. Eam vero Geometrarum nemo hactenus finitis numeris exacte exprimere valuit; eam autem, quam van Ceulen ἀκριβεία Geometriæ approximantem multo tædiosoq; labore invenit, & quam ingeniosissimus *Abrahamus Sharpius* totidem figuris auxit, in sequenti propositione demonstrabimus.

§. 38. *Prop.* 23. Ratio Diametri ad peripheriam circuli est ut 1 ad 3.14159265359O, &c. in infinitum. Ducatur enim recta AD (Fig. 37.) tangens quadrantem AFH in puncto A; ducantur itidem ex punctis B & D versus centrum 6 secantes BC, DC, & erit AB tangens arcus AF, & AD, tangens arcus AG; per consequens tangens est quantitas fluens, & BD est incrementum, quod tangens capit eodem momento temporis, quo arcus FG describitur. Ducatur perpendicularis BE ad secantum DC, & concipiatur incrementum DB evanescens, sive in principio nascendi, ita ut punctum D coincidat cum puncto B, tum enim angulus DCB evanescit, & angulus BDE,

æqua-

æqualis est angulo ABC, ipsaq; triangula BDE & ABC sunt similia, eorumq; latera circa angulos æquales proportionalia, hoc est, $BC.BD::AC.BE$. Ponatur radius $AC=1$. Tangens $AB=x$; erit Fluxio ejus $BD=\dot{x}$, & $BC=\sqrt{1+xx}$; igitur $\sqrt{1+xx}.\dot{x}:1.\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{1+xx}}=BE$. Sunt vero & triangula BCE & FCG similia; nam anguli F & G sunt recti, quia omnes radii ad peripheriam sunt perpendiculares, anguliq; coincidentes B & E itidem sunt recti; angulus enim BCE evanescit; quamobrem $BC.BE::FC.FG$, hoc est $\sqrt{1+xx}.\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{1+xx}}::1.\dfrac{\dot{x}}{1+xx}=FG$, quæ est Fluxio arcus AF. Est vero $\dfrac{\dot{x}}{1+xx}=\dfrac{\dot{x}\times 1}{1+xx}$. Dividatur ergo 1 per $1+xx$, & erit quotiens $1-x^2+x^4-x^6$, &c. qui multiplicatus per $\dot{x}$ dabit Fluxionem $\dot{x}-xx^2\dot{x}+x^4\dot{x}-x^6\dot{x}$, &c. cujus quantitas fluens sive arcus AF est $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}$, &c. At quoniam tangens arcus 45 graduum sive octantis est æqualis radio, hoc casu x est $=1$, & arcus 45 grad. erit $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}$ &c.



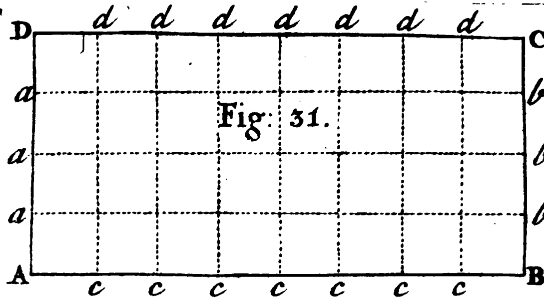
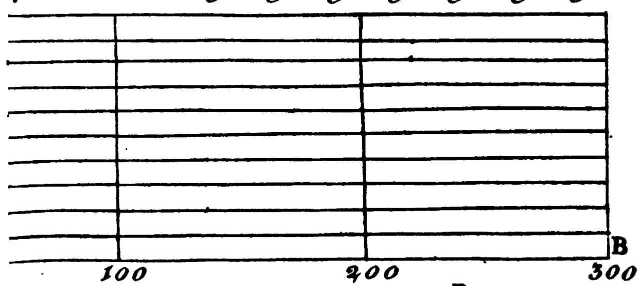


Fig: 31.



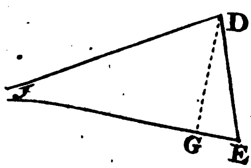
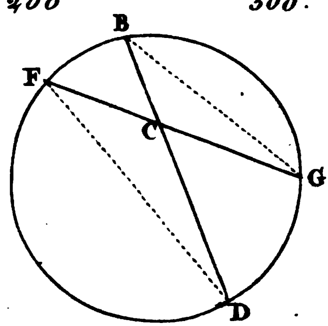
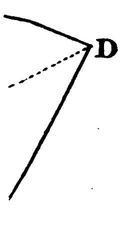


Fig: 34.



: 35.



g: 36.

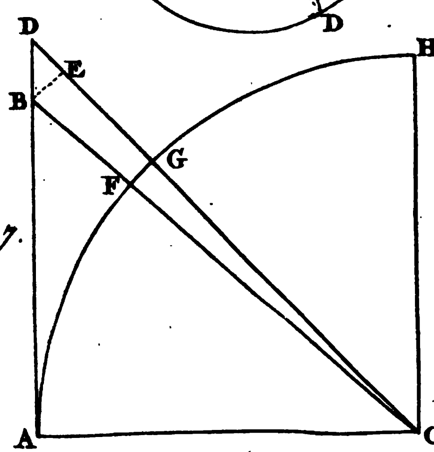


Fig: 37.

&c. in infinitum, in qua ſerie ſigna $+$ & $-$ alternant, & denominatores fractionum in ratione Arithmetica progrediuntur. Pone jam totum diametrum circuli$=1$, & eadem ſeries quadrantem peripheriæ exprimet, quam ſi multiplicas per 4, habebis totam peripheriam $4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}$, &c. ſive $3-\frac{1}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}$,&c. Cujus diamiter eſt 1. Quodſi ergo fractiones $-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$, &c. in unam ſummam collectas ab unitate ſubtrahis, & reſiduum per 4 multiplicas, prodibit numerus ſupra poſitus 3.1415, &c.

Sed quoniam additio fractionum dictarum nimis tædioſa eſt, *Sharpius* loco tangentis 45 grad. tangentem 30 grad. elegit, quæ, cum radius ponitur 1, eſt $=\sqrt{\frac{1}{3}}$ ſive $\sqrt{0.33333}$,&c.$=57735$, &c. ut in tabulis tangentium invenitur; eſt ergo arcus hujus tangentis $\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{1}{5\times9}\times\sqrt{\frac{1}{3}}$, &c.$=\sqrt{\frac{1}{3}}\times 1-\frac{1}{3\times3}+\frac{1}{5\times9}-\frac{1}{7\times27}+\frac{1}{9\times81}$, &c. Si hanc ſeriem quæ exprimit arcum 30 grad. ſive ſextantis ſemiperipheriæ mul-

multiplicas per 6 habes semiperipheriam $6\sqrt{\frac{1}{3}}\times 1 - \frac{1}{3\times 3} + \frac{1}{5\times 9}$, &c. $=\sqrt{36\times\frac{1}{3}} = \sqrt{12}\times 1\,(-\frac{1}{3\times 3} + \frac{1}{5\times 9} - \frac{1}{7\times 27} + \frac{1}{9\times 81}$, &c. Regula ergo hæc est: extrahe radicem ex 12, & divide radicem hanc 3.4641, &c. per 3, quotientem 11547, &c. divide itidem per 3, novumque quotientem 3849, &c. iterum per 3, &c. divide porro quemlibet quotientem per coefficientem suum, e. g. 11547, &c. qui est $\sqrt{12}\times\frac{1}{3}$ per 3, 3842, &c. $=\sqrt{12}\times\frac{1}{9}$, per 5, &c. adde separatim numeros positivos & negativos, horumq; summam a summa illorum aufer; differentia dabit semiperipheriam, si radius ponitur 1, sive totam peripheriam, cum diameter ponitur 1. hoc est numerum supra dictum 3.14159265, &c.

Coroll. 1. Quodsi numerum hunc, qui peripheriam exprimit per quartam partem diametri, hoc est $\frac{1}{4}$ multiplicas, habebis aream circuli $=0.78539816 3397$, &c. Est igitur quadratum diametri ad aream circuli ut 1 ad 0.78539, &c.

Coroll. 2. Circuli sunt inter se ut quadrata diametrorum; nam ratio circuli ad quadratum diametri suæ in omnibus una eademq; est. Sit unus circulus *A* & quadratum diametri ejus *B*, sit alter

alter circulus C & quadratum diametri ejus D; erit $A.B::C.D$, & transponendo medios terminos, $A.C::B.D$.

Coroll. 3. Tota peripheria aut circulo cognitis, per regulam trium cujusvis arcus aut partis circuli sive sectoris, cujus gradus dantur, longitudo aut area in veniri potest, e. g. Si tota peripheria continet 34 pedes, longitudo arcus 30 grad. invenitur per hanc analogiam: ut 360 gr. ad 30 gr. ita 34 pedes ad 2 pedes 10 digitos

$$\begin{array}{r} 34 \\ 30 \\ \hline 360)\ 1020\ (2\tfrac{30}{36}\ \text{sive}\ \tfrac{5}{6}\ \text{sive 10 dig.} \\ 30 \end{array}$$

§. 39. *Prop.* 24. Ducatur ex puncto quovis peripheriæ D (Fig. 38.) perpendicularis DB ad diametrum AC; dico hanc perpendicularem esse mediam proportionalem inter partes diametri AB & BC. Ducantur enim rectæ AD & DC; & erunt triangula ADC, ADB & DBC sibi invicem similia: nam anguli o & t simul sumti faciunt angulum rectum, & anguli r & s sunt etiam duo anguli recti; igitur bini anguli m & n, m & o, t & n, simul sumti, æquales sunt angulo recto, per consequens angulus n æqualis est angulo o, & angulus t æqualis angulo m; quamobrem latera in triangulis ADB & DBC circa æquales angulos sunt proportionalia, hoc est, $\div\!\!\div AB.DB.BC$.

Coroll.

Coroll. 1. Quadratum ergo perpendicularis *D B* æquale est rectangulo ex duabus partibus diametri *A B* & *B C* in se invicem ductis.

Coroll. 2. Eodem modo probatur quadratum *D C* æquale esse rectangulo ex *A C* in *B C*.

§. 40. *Prop.* 25. Construatur quadratum super quodvis latus trianguli rectanguli *A B C*; (Fig. 39.) dico quadratum lateris maximi *B C*, hypothenusa dicti, æquale esse quadratis reliquorum laterum *A C* & *B A* simul sumtis. Ducatur enim ex angulo *A* recta parallela rectæ *C E*, & eodem modo ut in præcedenti propositione demonstratur, triangula *A C B*, *A C D* & *A D B*, esse sibi invicem similia; igitur latera circa angulos æquales sunt proportionalia, hoc est ÷ *B C* sive *E C*. *A C*. *C D*, item ÷ *B C* sive *B F*. *A B*. *B D*. per consequens quadratum mediæ proportionalis *A C* æquale est rectangulo ex *E C* in *C D*, & quadratum mediæ proportionalis *A B* æquale rectangulo ex *B F* in *B D*, & duo quadrata laterum *A C* & *A B* simul sumta æqualia sunt duobus rectangulis *D E*, *D F*, simul sumtis, hoc est, quadrato Hypothenusa *B C*.

Coroll. (Fig. 40.) Quoniam circuli sunt inter se ut quadrata diametrorum suarum; igitur semicirculus super hypothenusam *B C* æqualis est semicirculis duorum reliquorum laterum *A C* & *B A* simul sumtis, & duæ lunulæ *C D A* & *A E B* simul sumtæ æquantur triangulo *A C B*.

§. 41. Solida generantur motu superficierum: sic cubus generatur; si quadratum *D E* (Fig. 41.) movetur secundum directionem quadrati *A B*, ad ad prius perpendicularis, motu æquabili & parallelo. Si quodvis parallelogrammon (Fig. 42.) *d e* secundum directionem alius parallelogrammi *a b*, quod cum priori sive angulum rectum sive obliquum format, motu parallelo fertur, parallelopipedum generatur. Sic prisma *AD* aut Cylindrus (Fig. 33. & 44.) *a d* formantur, si triangulum *A B C*, aut circulus *a b*, motu parallelo secundum directionem rectæ *A D* vel *b d*, in quacunq; positione ad triangulum *A B C* aut circulum *a b*, moventur. Sic pyramis (Fig. 45 & 46.) trilatera *B D*, aut conus *a b c*, si triangulum *ABC* aut circulus *a b* parallelos moventur secundum directionem rectæ in quacunq; positione, & latera illius, aut hujus diameter, continuo & æqualiter decrescunt, donec in puncto *D* aut *c* prorsus evanescant. Deniq; sphæra formatur, si semicirculus *A B C* (Fig. 47.) movetur circa diametrum sive axin *A C*. Ex his generationum definitionibus patet, omnes cubos & sphæras esse sibi invicem similes, sed ex parallelopipedis, prismatibus, cylindris, conis & pyramidibus illa, quæ habent similes bases, & quorum directrices ad bases suas habent eandem rationem & positionem.

§. 42. *Prop.* 26. Omnia parallelopipeda æquales bases & altitudines, hoc est perpendiculares inter basin & superficiem ei oppositam, habentia sunt æqualia. Sint enim duo parallelopipeda (Fig. 48.) *a b d l i e g* & *a b d m k f h*, quæ habent eandem basin *a b d c*, & eandem altitudinem *g b*. Prius constat ex solidis *i e a f k c* & *k f a b d l*, alterum ex solidis *k f a b d l* & *l g b h m d*; sed solida *i c a f k e* & *l g b h m d* ſunt ſimilia & æqualia; nam habent æquales baſes *a e f* & *b g h*, & directrices eorum *c a* & *d b* habent eandem longitudinem & poſitionem ad lineas baſes *e a*, *g b* & plana baſis *a e f* & *b g h* motu parallelo feruntur; igitur duo ſolida æqualia *e c* & *g d* uni eidemq; ſolido *k f a b d l* addita faciunt æqualia tota, hoc eſt, parallelopipedum *e b i d* æquale eſt parallelopipedo *f b k d*.

§. 43. *Prop.* 27. Spatium ſolidum parallelopipedi producitur multiplicando baſin per altitudinem. Sit enim parallelopipedum rectangulum *e a b d l i*, cujus baſis eſt *a b d c*, & altitudo *e a*; ex ipſa generatione parallelopipedi patet, planum *a b d c*, quod motu parallelo ſecundum directionem *a e* format parallelopipedum, eſſe quantitatem conſtantem, & altitudinem *a e* continuo accreſcentem ſeu fluentem, quam appellabimus x; igitur ſi baſin *a b* per Fluxionem ſive velocitatem $\dot{x}$, qua altitudo *a e* accreſcit, multiplicas, habes momentum ſeu ſpatiolum ſolidum $a b \dot{x}$, quod baſis *a b d c* percurrit in momento temporis. Concipe jam illud momentum temporis evaneſcens; & illud ſpatiolum evaneſcet, & erit ut ipſa fluxio, cujus quantitas fluens, quod eſt ipſum parallelopipedum, eſt $a b x$, hoc eſt, baſis *a b c d* multiplicata per altitudinem *a e*. E. g. Sit longitudo parallelopipedi 4 pedes, ejus latitudo 3; erit baſis ejus 12 pedes quadrati; ſit deniq; altitudo ejus 4, erit ſpatium ſolidum 48 pedes cubici. Et quoniam parallelopipeda obliquangula æqualia

ſunt

sunt rectangulis eandem basin & altitudinem habentibus; igitur & eorum spatium solidum eodem modo producitur, multiplicando *viz.* eorum basin per altitudinem.

Coroll. Eodem modo probatur, prismata & cylindros produci multiplicando basin eorum per altitudinem.

§. 44. *Prop.* 28. Quodvis prisma triangulare est dimidium parallelopipedi, quod habet eandem longitudinem, latitudinem & altitudinem cum eo. • Nam pone longitudinem $AB=a$, (Fig. 43.) latitudinem $CE=b$, erit planum basis $ABC=\frac{ab}{2}$, quod est quantitas constans, quæ multiplicata per Fluxionem altitudinis $DA=\dot{x}$ facit Fluxionem $\frac{ab\dot{x}}{2}$, cujus quantitas fluens $\frac{abx}{2}$ est solidum spatium prismatis, quod est dimidium parallelopipedi abx.

§. 45. *Prop.* 29. Pyramis triangularis est tertia pars prismatis triangularis æqualem basin & altitudinem cum eo habentis. (Fig. 45.) Formatur enim pyramis motu parallelo basis, cujus longitudo AB æq; ac latitudo CD æqualiter decrescunt, donec in puncto D penitus evanescant; ergo longitudo, latitudo & altitudo, sunt quantitates fluentes; hanc exprimemus per x, & latitudinem per y. Ponatur ratio longitudinis ad latitudinem ut a ad b, & erit $b.a::y.\frac{ay}{b}$; igitur triangulum basis decrescens $\frac{a\,y\,y}{2b}$, quod multiplicatum per Fluxionem altitudinis $\dot{x}$ facit $\frac{a\,y\,y\,\dot{x}}{2b}$ Fluxionem pyramidis. Substituatur ex natura figuræ, quam latitudo æqualiter decrescens format, quæ hic est triangulum rectilineum BCD, valor quantitatis $y\,y$. Ponatur ratio altitudinis DB ad latitudinem AC, ut c ad b, & erit $c.b::x.y$, quare $y=\frac{b}{c}x$, & $yy=\frac{b^2x^2}{cc}$; igitur $\frac{ayy\dot{x}}{2b}=\frac{ab^2x^2\dot{x}}{2bcc}$, cujus Fluxionis quantitas fluens est $\frac{ab^2x^3}{3\times 2bcc}$. Substituatur loco x^3, c^3, & erit $\frac{ab^2c^3}{3\times 2bcc}=\frac{abc}{3\times 2}=\frac{abc}{6}$, spatium solidum pyramidis, quod est tertia pars prismatis $\frac{abc}{2}$.

Coroll. 1. Solidum pyramidis est factum ex basi in tertiam partem altitudinis.

Coroll. 2. Eodem modo probatur, conum esse tertiam partem cylindri æqualem cum eo basin & altitudinem habentis.

Coroll. 3. Quælibet sphæra concipi potest divisa in infinitum numerum pyramidularum, quarum vertices in centro sphæræ concurrunt, & bases sunt partes superficiei convexæ sphæræ; quæ cum sint infinite parvæ, cum planis conveniunt. Quamobrem tota sphæra æqualis est pyramidi, cujus basis est æqualis superficiei sphæræ, & altitudo semidiametro ejus.

§. 46.

§. 46. *Prop.* 30. Sphæra continet duas tertias cylindri, cujus basis est æqualis maximo sphæræ circulo & altitudo ejus diametro. Sphæra enim formatur motu maximi circuli parallelo in directione $A\,B$, (Fig. 47.) ita ut diameter ejus æque ac peripheria in ratione ordinatarum circuli $d\,c$, decrescant, donec in punctis A & B prorsus evanescant. Ponatur jam circuli decrescentis ratio diametri ad peripheriam ut d ad c, & ordinata quævis CD, cd, &c. y; erit peripheria ejus $\frac{2\,cy}{d}$; nam $d.\,c :: 2\,y.\,\frac{2\,c\,y}{d}$. Multiplicando hanc peripheriam per ordinatæ dimidium $= \frac{y}{2}$, habebis circulum decrescentem $\frac{c\,y\,y}{d}$. Multiplica denique hunc circulum per Fluxionem diametri $A\;B$, quam exprimere licet per $\dot{x}$, & habebis $\frac{c\,y\,y\,\dot{x}}{d}$, ipsam Fluxionem sphæræ. Quodsi jam ex ipsa æquatione circuli loco $y\,y$ valorem ejus substituas, ipsiusque Fluxionis quantitatem fluentem quæras, habebis solidum sphæræ. At vero in *Prop.* 24. *Coroll.* demonstratum est, ordinatæ cujusvis $c\,d$ quadratum æquale esse parallelogrammo ex partibus diametri $A\,d$ & $d\,B$ in se invicem ductis. Ponendo ergo diametrum d, & $A\,d = x$, erit $d\,B = d - x$, & $yy = dx - xx$; igitur $\frac{c\,y\,y\,\dot{x}}{d} =$

$\frac{cdx\dot{x} - cx^2\dot{x}}{d}$, cujus quantitas fluens est $\frac{cdx^2}{2d} - \frac{cx^3}{3d}$. Ponatur loco x tota diameter d, & erit $\frac{cd^3}{2d} - \frac{cd^3}{3d} = \frac{3cd^4 - 2cd^4}{6d^2} = \frac{cd^2}{6}$, solidum totius sphæræ, quod est duæ tertiæ solidi $\frac{cd^2}{4}$, hoc est, cylindri, cujus basis est maximus sphæræ circulus $\frac{cd}{4}$, & altitudo diameter sphæræ d.

Coroll. 1. Rationem quadrati diametri ad circulum demonstravimus *Prop.* 23. *Coroll.* 1. esse ut 1 ad 0.785398163397, &c. quæ etiam est ratio cubi ad cylindrum, cujus diameter & altitudo æqualis est lateri cubi; si ergo capis duas tertias de hoc cylindro, habebis rationem sphæræ ad cubum diametri ut 0.523598775598 ad 1.

Coroll. 2. Superficies sphæræ est ad maximum ejus circulum ut 4 ad 1. Nam *Prop.* 29. *Coroll.* 3. demonstratum est, sphæram æqualem esse pyramidi, cujus basis est superficies sphæræ, & altitudo ejus semidiameter. Quodsi ergo solidum sphæræ per tertiam partem semidiametri, sive sextam totius diametri, dividas, habebis superficiem sphæræ. Est vero solidum sphæræ $\frac{cd^2}{6}$; & sexta pars diametri $\frac{d}{6}$; igitur superficies sphæræ est cd, hoc est, circumferentia ducta in diametrum, cujus

cujus producti quarta pars $\frac{c\,d}{4}$ est maximus sphæræ circulus.

Coroll. 3. Diametro sphæræ data solidum ejus duplici modo inveniri potest, viz. per rationem cubi diametri ad solidum sphæræ, vel multiplicando diametrum per ipsius peripheriam, illudq; productum per sextam partem diametri. *E. g.* Sit diameter sphæræ 6 pedes cum 4 digitis, sive 76 digiti, cubus ejus erit 438976 digiti cubici; pone ergo;

ut 1. ad 0.523598 & sive 0.5236 circiter ita

```
                                   43 8976 ad, &c.
                                    0.5236
                                  ---------
                                  263 3856
                                 1316 928
                                 8779 52
                               219488 0
                               -----------
Solidum sphæræ               229847.8336 dig. cub.
```

Alio modo.

```
1.0000 —— 3.1415, &c. —— 76
                  76
           ----------
             18 8490
            219 905
           ----------
Periph. circ. 238.7540
```

238.7540 dig. quadr.
Diameter, 76 dig.

1432.5240
16712780

Superfic. sphær. 18145 3040
Sexta pars diam. $12\frac{2}{3}$

36290 6080
181453 040
6048 $4346\frac{1}{3}$
6048.$4346\frac{2}{3}$

Solid. sphær. 229840.$5173\frac{1}{3}$ dig. cub.

Coroll. 4. Sphæræ sunt inter sese ut cubi diametrorum earum. Sit enim una sphæra *A* & cubus diametri ejus *B*, sit altera sphæra *C* & cubus diametri ejus *D*; erit *A*. *B*: : *C*. *D*, & transponendo terminos medios *A*. *C* : : *B*. *D*.

De Sectionibus Conicis.

§. 47. Si linea recta *A B* indeterminatæ magnitudinis ad aliam rectam (Fig. 49.) *C D* itidem indeterminatam applicata ita movetur, ut priori positioni *A B* semper parallela maneat, superficies inde generata plana dicitur. Hinc omnia puncta cujusvis rectæ *C D*, *E F*, &c. ex duobus punctis plani *C D* vel *E F* ductæ sunt in eodem plano; & duo plana *A B I H*, & *C L K D*, sese invicem

invicem ſecantia, in linea recta *C D* concurrunt: Ponantur enim concurrere in punctis duobus *C* & *D*, linea recta *C D* erit in utroque plano.

§. 48. Supponantur rectis *A B*, *C D*, *C E*, *C F*, *C G*, *H I*, (Fig. 50.) totidem plana inſiſtere, perpendicularia ad planum in quo rectæ ſunt delineatæ, quod planum baſis appellamus, ſi planum *H I* plano *A B* eſt parallelum, & plana *C D*, *C E*, *C F*, *C G*, omnia in una eademque recta ad planum baſis in puncto *C* perpendiculari concurrunt; dico planum *H I* hæc ipſa plana ſecare in rectis ad planum baſis in punctis *N K L M* perpendicularibus, & ob hanc rationem inter ſeſe parallelis.

§. 49. Concipiatur punctum *A* (Fig. 51.) eſſe ſupra planum in quo circulus baſis *B D C* delineatus eſt, & lineam rectam *E A F* circa punctum *A* immobile ita circumgirari ut ſemper ad peripheriam circuli applicetur; ſuperficies duæ, quarum una eſt ſupra, altera infra punctum *A*, dicuntur conicæ, & quidem ad verticem *A* oppoſitæ. Spatium ſolidum, quod intra ſuperficiem conicam continetur, dicitur conus, & linea recta per verticem *A* & centrum circuli baſis *O* tranſiens, axis appellatur; quæ ſi ad circulum baſis eſt perpendicularis, conus vocatur rectus; ſin minus, obliquus ſeu ſcalenus.

§. 50. Planum quodvis *G H*, ſuperficiem conicam ſecans, modo verticem *A* non tranſeat, dicitur planum ſecans, & planum *A B*, ſecanti parallelum, per verticem tranſiens, planum verticale appellatur; linea recta *L M*, in qua planum verticale

ticale cum plano basis concurrit, directrix vocatur. Curva *H K I*, in qua planum secans cum superficie conica concurrit, dicitur sectio conica. Si linea directrix circulum basin tangit, sectio in qua planum secans cum superficie conica concurrit vocatur Parabola; si directrix intra circulum basis cadit, sectio Hyperbola; si directrix extra circulum basis est, sectio Ellipsis vocatur. Omnia deniq; plana cum plano basis parallela sectionem faciunt circularem.

Quælibet recta *i h* duo puncta sectionis jungens est ordinata, & quælibet recta *K N* ordinatas omnes inter se parallelas per medium dividens est diameter, ac punctum sectionis *K*, per quod diameter transit, dicitur terminus diametri.

Omnes rectæ, quæ per verticem coni & puncta sectionis ducuntur, terminantur in punctis peripheriæ circuli basis, & hæc puncta dicuntur formare puncta sectionis. Rectæ in circulo basis, quæ formant diametros, diametrales vocantur.

§. 51. *Lemma* 1. Ducatur recta *F E* (Fig. 52.) secans rectam *A D* in puncto quovis *B*, & fiat *B E* æqualis *B F*, ducatur huic parallela *D G*, & ex puncto *A* ducatur recta per punctum *F* concurrens cum recta *D G* in puncto *G*, ducatur deniq; recta *E G*; dico rectam *A D* a rectis *E F* & *E G*, secari harmonice, ita ut *A D* sit ad *A B*, ut *DC* ad *B C*. Nam quoniam triangula *A B F*, & *A D G*, item *C G D* & *C B E*, sunt similia, *AD*. *A B* : : *D G*. *B F*.=*B E* : : *D C*. *C B*.

§. 52. *Lemma* 2. Sit linea recta *A B* (Fig. 53.) harmonice secta in punctis *A C D B*, & ducantur

ex

Fig: 39.

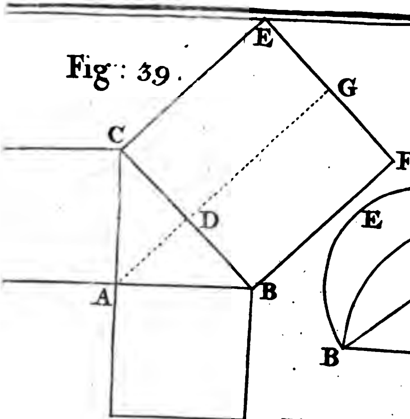


Fig: 40.

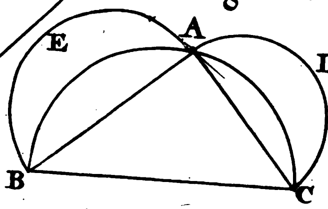


Fig: 43.

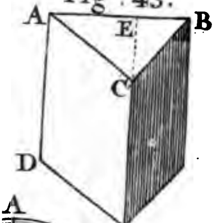


Fig: 44.

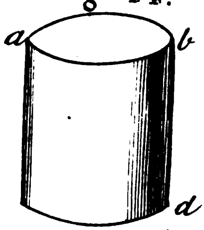
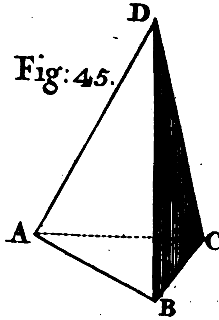
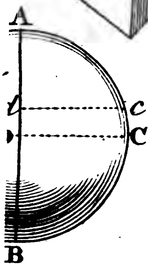


Fig: 45.





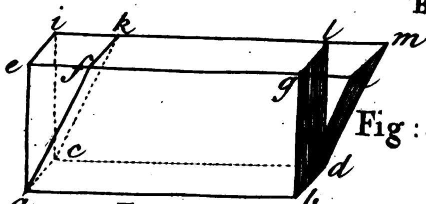


Fig: 48.

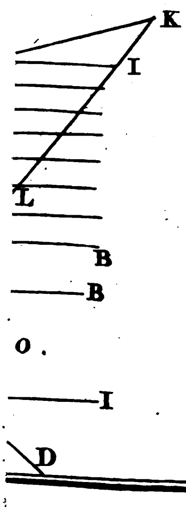
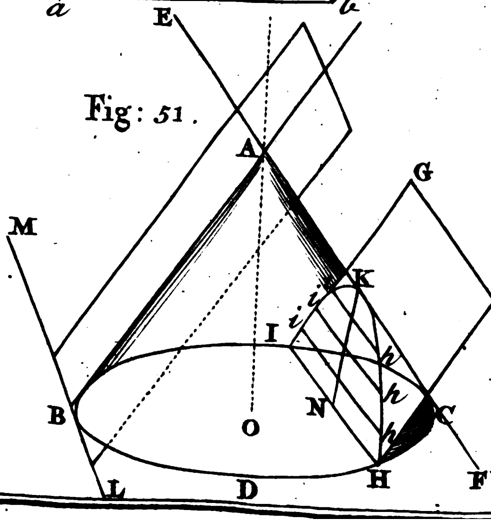


Fig: 51.



ex puncto E extra lineam per puncta sectionis rectæ $E\,A$, $E\,C$, $E\,D$, $E\,B$; hæ rectæ dicuntur Harmonicales. Quodsi uni earum cui cunque parallela ducitur occurrens tribus reliquis, hæc parallela ab iisdem bifariam dividitur. Ducatur enim per punctum C recta $F\,C\,G$ parallela harmonicali $E\,B$; dico hanc parallelam $F\,B$ bifariam dividi a tribus reliquis harmonicalibus, $E\,A$, EC, $E\,G$, in punctis F, C, G. Etenim per *Lemma* 1. linea $A\,B$ harmonice secatur, si $F\,G$ ducitur parallela lineæ $E\,B$, & $C\,G$ æqualis fit $C\,F$, ac ex puncto G versus E ducitur recta. Sunt igitur rectæ $E\,A$, $E\,C$, $E\,D$ harmonicales, & recta FG, parallela harmonicali EB, bifariam ab iisdem dividitur in punctis F, C, G. Ducatur lineæ $F\,G$ parallela $H\,K$, & hæc ipsa bifariam dividitur ab iisdem harmonicalibus in punctis H, I, K. Nam quoniam triangula $E\,C\,G$, $E\,I\,K$, item $E\,C\,F$, $E\,I\,H$, sunt similia; igitur $C\,G.\,C\,F::I\,K.\,I\,H$; per consequens $I\,K$, & $I\,H$, sunt æquales.

§. 53. *Lemma* 3. Ducantur ad circulum $FD\,GB$ (Fig. 54.) tangentes FA, GA, concurrentes in puncto A, & jungantur puncta tactus F & G recta FG; ducatur ex hoc ipso puncto A recta occurrens peripheriæ circuli in punctis B & D, & conjungenti tactus $F\,G$ in puncto C; dico rectam $A\,D$ harmonice dividi in punctis A, B, C, D. Fiat enim super chordam $B\,D$ semicirculus $B\,H\,D$, ducaturq; perpendicularis $A\,O$ ad conjungentem tactus $F\,G$, item ducatur recta $H\,C$ ex puncto C perpendicularis ad rectam $A\,C\,D$ & occurrens peripheriæ $B\,H\,D$ in puncto H. Ducantur huic pa-

parallelæ BI, DE, & ex puncto A per H recta $AIHE$; & erit per *Prop.* 25. quadrat: $AF=$ quadr: FO + quadr: AO; & quadr: $AC=$ quadr. CO + quadr. AO; item quadr: $AC-$ quadr: $CO=$ quadr: AO. Erit porro $FC \times CG$ + quadr: $CO=$ quadr: FO; ponatur enim $FO=a$, & $CO=x$, erit $FC=a-x$, & $CG=a+x$; igitur $FC \times CG=aa-xx$, & $FC \times CG+$quadr: $CO=aa-xx+xx=aa=$quadr: FO; quare quadr: FO + quadr: $AO=FC \times CG$ + quadr: CO + quadr: AC — quadr: $CO=FC \times CG$ + quadr: $AC=$ quadr: AF. Deinde $FC \times CG=BC \times CD$ =quadr: CH, per *Prop.* 21. & *Coroll. Prop.* 24. Igitur quadr: AC + quadr: $CH=$ quadr: $AF=$ quadr: AH. Sed $DA \times AB=$ quadr: AF, per *Cor. Prop.* 15. & $AF=AH$; ergo recta AE tangit circulum BHD in H, & IB est $=IH$, item $ED=EH$ per *Coroll. Prop.* 16. Sed AE. AI: : ED. IB: : EH. HI, & propter triangula ABI, ACH & ADE similia, AD. AB: : DC. CB. Linea ergo AD est in punctis A, B, C, D, harmonice secta.

Coroll. Si recta DA occurrens circulo in punctis D & B est harmonice divisa in punctis A, B, C, D, punctum divisionis C, est occursus rectæ FC conjugentis tactus contingentium, quæ ex puncto A ducuntur.

§. 54. *Prop.* 31. In omni sectione conica omnes ordinatæ inter se parallelæ, utcunq; ductæ, bifariam dividuntur a linea recta, quæ vocatur diameter harum parallelarum. Esto enim planum verticale $ACBt$, (Fig. 55.) occurrens plano basis

ſis in recta *C B t*, quæ erit directrix, & planum ſecans *LHND*, in quo fit ſectio, parallelum plano verticali. Si intelligantur plana per verticem *A* & per unamquamq; parallelarum, ut *A C NL*, per rectam *NL*; hæc plana communem occurſum in plano verticali rectam habebunt verticalem *AC* parallelam parallelis rectis in ſectione; ſed hæc verticalis directrici in aliquo puncto *C* occurret, vel erit ei parallela; occurrat primo,

Planum *A C NL* occurret plano baſis in recta *C l n*, nam puncta *N L* ſectionis formantur a punctis *n l* circuli baſis; & a puncto *C* ductis contingentibus ad circulum *Ch*, *Cm*, & *h m* conjungente tactus; per lemma 3. recta *Cn* dividitur harmonice in punctis *C l p n*; ſed in plano *AC NL* rectæ *AC*, *A l*, *A p*, *An*, ſunt harmonicales, & recta *N L* eſt parallela rectæ *AC* & occurrit tribus tantum harmonicalibus *A l*, *A p*, *A n*, in punctis *L*, *P*, *N*; quare per lemma 2. partes *N P*, *P L*, erunt æquales; erit eadem demonſtratio pro ceteris parallelis rectæ *N L*. Sed rectæ *A p* a vertice *A* per puncta *p* diametralis *h m*, ductæ, quæ formant in ſectione puncta *P*, quæ bifariam dividunt ordinatas, ſunt in eodem plano *A h m*, cujus occurſus cum plano ſectionis eſt linea recta *H P*; igitur hæc recta *H P* ordinatas omnes *N L*, inter ſe parallelas, bifariam dividit, earumq; dicitur diameter.

Si verticalis *A C* ſit æquidiſtans directrici *C B*, contingentes *C m*, *C h* & recta *n l*, erunt quoq; parallelæ directrici *C B*, & recta *h m* in hoc caſu tranſibit per centrum circuli baſis, bifariamq; di-

videt

videt $l\,n$ in p. Sed recta $l\,n$ erit quoq; parallela rectæ $L\,N$, & recta $A\,p$ bifariam dividens $l\,n$ in p, dividet etiam $L\,N$ bifariam in P; similis demonstratio erit pro ceteris parallelis rectæ $L\,N$; ideoq; ut in præcedenti casu, recta $H\,P$, quæ est occursus plani $A\,h\,m$ cum plano sectionis, est diameter.

Coroll. recta $T\,S$ ducta per terminum H cujusvis diametri, & æquidistans ordinatis $N\,L$ ad hanc diametrum, sectionem in termino eodem contingit; & vice versa, contingens sectionem in termino diametri est parallela ordinatis ad hanc diametrum.

§. 55. *Prop.* 32. In parabola omnes diametri sunt inter se parallelæ, & omnis recta indeterminata & æquidistans cuivis diametro supra plano parabolæ posita, occurret parabolæ & erit diameter. Nam ex iis, quæ demonstrata sunt in prop. anteced. apparet, omnes diametros formatas esse a diametralibus rectis, ut $m\,h$, $m\,h$, &c. quæ conjungunt tactus ad circulum rectarum $C\,h$, $C\,m$, ab omnibus punctis directricis C, C, C, &c. ductarum; sed in parabola directrix ipsa contingit circulum basin in m; quamobrem punctum m contactus directricis commune erit omnibus diametralibus: sed plana ducta per verticalem $A\,m$, & per omnes diametrales, occurrunt plano secanti, quod est plano verticali parallelum, in rectis inter se & verticali $A\,m$ parallelis, per §. 48; quare in parabola omnes diametri sunt inter se parallelæ.

§. 56. *Lemma* 4. Ducatur linea recta $A\,B$ extra circulum (Fig. 56.) $F\,C\,H\,D$, & ex quibuslibet punctis rectæ $A\,B$ ducantur contingentes $A\,D$ & $A\,C$, B

L &

L & *B M*, &c. & contingentes tactus *D C*, *D M*; dico omnes has contingentes tactus transire per unum punctum *G* intra circulum. Sit enim linea *A H* perpendicularis ad lineam *A B*, & transeat per centrum circuli *O*, recta *D C* conjungens tactus contingentium *A D*, *A C*, erit etiam perpendicularis ad rectam *A H*, & hæc recta *A H* transiens per circuli peripheriam in punctis *F* & *H*, & per conjungentem tactus in puncto *G*, erit per *Lem.* 3. harmonice divisa in punctis *A F G H*. Ducatur ex puncto *A* alia recta transiens per circuli peripheriam in punctis *I* & *L*, & per conjungentem tactus *D C* in puncto *K*, & hæc erit divisa harmonice in punctis *A I K L*. Ducatur porro ex puncto *L* per punctum *G* recta *L G B*, & ex puncto *I* parallela rectæ *D G*, hæc ipsa parallela *I N* erit perpendicularis ad rectam *A H*, & punctum *N* in peripheria circuli; igitur propter similitudinem triangulorum *L K G*, *L I N*, *L A B*, linea *L B* erit etiam divisa harmonice in punctis *B N G L*, quamobrem per *Coroll. Lemm.* 3. conjungens tactus *L M* contingentium *B L*, *B M* per punctum divisionis *G* transire debet. Eadem demonstratio est transitus conjungentis tactus cujuslibet alius contingentium, ex quolibet alio puncto rectæ *A B* ductarum, per idem punctum *G*.

§. 57. *Lemma* 5. Ducatur linea *B b* transiens per circulum *I H G*, (Fig. 57.) & ducantur ex punctis quibuslibet *B*, *b* rectæ, *B b* contingentes ad circulum *B H*, *B I*, & *b h*, *b i*, jungantur puncta tactus rectis *I H*, *i h*; dico has conjungentes tactus omnes coire in uno puncto *A* extra circulum,

lum, si linea *B b* non transit per centrum circuli. Ducatur enim per centrum circuli *C*, & per punctum *o*, recta *L K* occurrens circulo in punctis *L* & *D*, & sit eadem harmonice divisa in punctis *L O D K*; ducatur porro per puncta *B* & *K* recta occurrens rectæ *h i* in *A*, & hæc erit harmonice divisa in punctis *i o h A*, ut in lemmate præced: demonstratum est; quare per lemma 3. punctum *A* est concursus contingentium ad circulum in punctis *F* & *G*. Eodem modo probatur, conjungentem tactus *IH* contingentium *B H*, *B I*, ex quolibet alio puncto *B* rectæ *B b* ductarum, occurrere eidem puncto *A*. Si recta *B b* transit per centrum circuli, tangentes *F A*, *G A*, & conjungentes tactus *A I*, *A i*, sunt inter se parallelæ.

§. 58. *Prop.* 33. In ellipsi & hyperbola, vel sectionibus oppositis omnes diametri terminatæ in sectione, vel inter sectiones oppositas, sese mutuo bifariam decussant in uno & eodem puncto, quod dicitur centrum. Sit enim sectio *L H N M* (Fig. 58.) ellipsis, & planum *A B C* parallelum plano sectionis; erit recta *C B* directrix, lineæ *h m*, *l n*, conjungentes tactus tangentium *C h*, *Cm*, & *D l*, *D m*, erunt diametrales, quæ formant in sectione diametros *HM*, *LN*; sed omnes hæ diametrales, quia tangentes ex punctis *C*, *D*, &c. unius rectæ *C D B* ducuntur, sese mutuo decussant in uno puncto *o* intra circulum basin per lemma 4. quod punctum format in sectione punctum *O*, in quo omnes diametri sese invicem decussant. Prolongatur diametralis *h m*, usq; ad punctum *B* directricis *C D B*; & erit *h B* harmonice divisa in

punc-

punctis *h*, *o*, *m*, *B*; diameter *H M*, quia parallela est harmonicali *A B*, & occurrit tribus reliquis *A m*, *A o*, *A h*, in punctis *M & H*, ab illis bifariam dividitur in puncto *O*. Eadem demonstratio est de ceteris diametris. Ergo omnes diametri ellipsis sese bifariam secant in puncto *O*, quod est centrum ellipsis.

Sint sectiones oppositæ *H N* & *L M* hyperbolæ, (Fig. 59.) erit directrix *D B C*, & conjungentes tactus *m h*, *l n*, tangentium *C m*, *C h*, & *D l*, *D n*, ex punctis directricis *C* & *D*, quæ diametrales vocantur, concurrunt cum omnibus aliis diametralibus in puncto *o*, per *lem.* 5; igitur idem punctum *o* in plano basis, format punctum *O* in plano sectionis, ubi omnes diametri *M H*, *L N*, &c. concurrunt; sed diametralis *m o* harmonice secta est in punctis *m*, *B*, *h*, *o*, si ergo per hæc puncta sectionis & per verticem *A* ducantur harmonicales, diameter *M H*, uni earum *B A*, quæ dicitur verticalis, est parallela, & occurrit tribus reliquis, quarum prima *m A* format in sectione inferiori punctum *M*, altera *h A H* punctum *H* in sectione superiori, & tertia *o A O* centrum sectionis; igitur diameter *H M*, inter sectiones oppositas bifariam dividitur in punctis *M O H*. Eadem demonstratio valet in ceteris diametris.

Si directrix *B C* transeat per centrum circuli basis, in hoc casu diametrales *m h*, *l n*, sunt inter se parallelæ, & bifariam dividuntur a directrice, & harmonicalis *o A* est parallela diametrali *m h*, diameter vero *M H*, ut in præcedenti casu bifariam dividitur a tribus harmonicalibus *m A*, *h AH*, & *o A O*.

Coroll. In ellipsi & hyperbola, vel sectionibus oppositis, omnes rectæ lineæ, per centrum ductæ sunt diametri, exceptis iis, quæ in hyperbola vel sectionibus oppositis formantur a contingentibus circulum basin in punctis circulo & directrici communibus, quæ sunt asymptoti; & diameter parallela ordinatis ad quamcunq; diametrum, vel contingenti in ipsius termino, dicitur conjugata eidem diametro & reciproce.

§.59.*Prop.*34.(Fig.60.) In omni sectione conica, si sint duæ contingentes *V N*, *V L*, in punctum *V* concurrentes, junctis tactibus *N L* a recta *N L*, eaq; bifariam divisa in *P*: dico rectam *V P*, per *V* & *P* ductam, esse diametrum rectarum æquidistantium rectæ *N L*. Sint enim rectæ *u n*, *ul*, in plano basis contingentes circulum in *n* & *l*, & formantes rectas *V N*, *V L*, in plano secante, quæ rectæ *u n*, *u l*, erunt inter se parallelæ, vel sibi mutuo occurrent in *u*, & recta *n l*, conjungens tactus ad circulum, occurret directrici in puncto *C*, vel erit ei parallela. Si ab occursu *C* directricis & rectæ *n l* ducantur contingentes *Cm*, *Ch*, & si *n l* sit æquidistans directrici, ductis contingentibus in *m* & *h* directrici parallelis, *C n* dividitur harmonice in punctis *C l p n* in primo casu; sed in secundo puncta *n p l* partes æquales faciunt. Sint autem harmonicales per verticem *A* & per puncta in recta *n l*; recta *NL* harmonicalium uni *A C* parallela bifariam in *P* ab harmonicali *A p* dividitur; & sic de quibuscunq; aliis parallelis rectæ *N*

L in

Fig : 53.

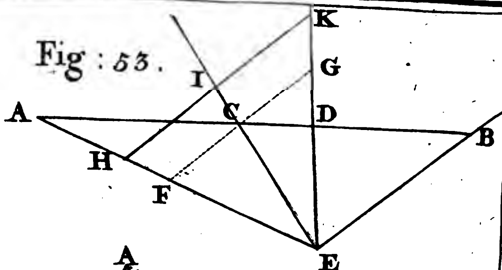


Fig : 55.

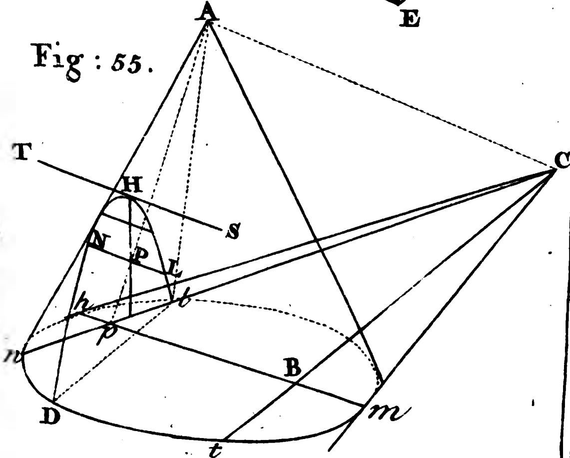
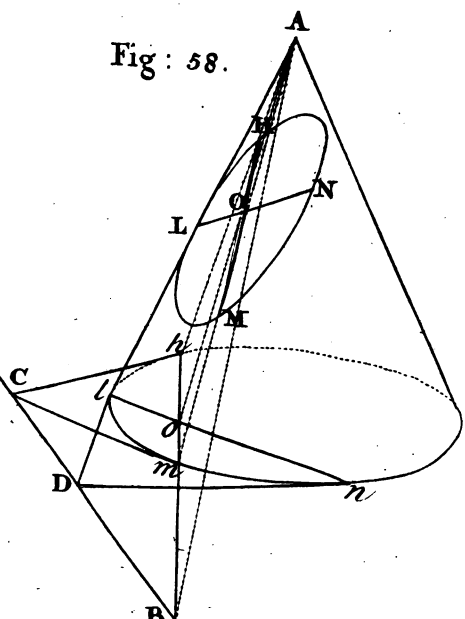
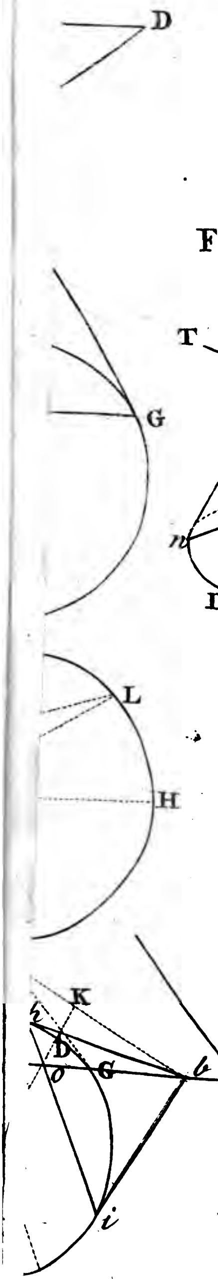


Fig : 58.





L in sectione applicatis : quare *V P* erit diameter formata à diametrali *u p m*.

§. 60. *Prop.* 35. Ducta contingente *L V* ad parabolam, occurrente diametro *V P* in puncto *V*, & ex puncto tactus *L* ducta recta *L P* applicata ad hanc diametrum ; dico partem diametri *V P* bifariam dividi à puncto *H*, qui est terminus diametri. Esto enim in plano basis diametralis *u p m* formans in sectione diametrum *U H*, sitq; recta *u l* formans contingentem *U L*, & *l p* ordinatam *L P*, recta *u h p m* dividitur harmonice, vel bifariam tantum in punctis *h p m*, si recta *u l* sit æquidistans rectæ *p u* ; intelligantur in utroq; casu harmonicales *A m*, *A p*, *A h*, *A u*, inter quas *A m* est parallela diametro *V P*, quare pars diametri *V P*, inter occursus contingentis & ordinatæ intercepta, bifariam in *H* dividitur a parabola.

§. 61. *Prop.* 36. Si a concursu *V* contingentium *V L*, *V N*, agatur recta linea *V R* occurrens sectioni duobus in punctis *R*, *S*, & conjungenti tactus *N L* in *D* ; dico rectam *V R* harmonice dividi a puncto *V*, a sectione in *R* & *S*, & a conjungente tactus in *D*. Recta enim *u r* in plano basis, formans rectam *V R* in plano sectionis, divisa est harmonice in punctus *u*, *s*, *d*, *r* ; quodsi jam concipiantur harmonicales per hæc puncta & per *A* ductæ recta *V R* in plano sectionis, harmonicalibus hisce occurrens in punctis *V S D R*, etiam harmonice ab iisdem dividetur.

Coroll. Manifestum etiam est in ellipsi & hyperbola, si recta contingens *N V* occurrat diametro MH in V, a contactu N ducta ordinata NP, diametrum dividi harmonice in punctis VH PM.

§. 62. *Lemma* 6. Recta ED harmonice divisa in punctis (Fig. 61.) $EBOD$, si duæ quælibet partes contiguæ ut EB & EO simul sumtæ bifariam dividuntur in A; dico segmenta AB, AO, AD, esse in continua proportione. Est enim ED. $OD :: EB$. BO. Fiat dE æqualis OD, & erit componendo $ED+OD$ ($=dD$). $OD :: EB+BO$ ($=EO$). BO. Et sumtis dimidiis partibus antecedentium AD. $OD :: AO$. BO. & dividendo, $AD-OD=AO$. $OD :: AO-BO=AB$. BO. sive AB. $BO :: AO$. OD & componendo AB. $AB+BO=AO :: AO$. $AO+OD=AD$.

§. 63. *Lemma* 7. Iisdem manentibus, dico quadratum EB esse ad quadratum ED ut AB ad AD. Quoniam enim AB, AO, AD, sunt in continua proportione, quadratum AB est ad quadratum AO, ut AB ad AD; sed AB est ad BO, ut BO ad OD, & BO est ad OD, ut EB ad ED; ergo quadratum EB est ad quadratum ED, ut AB ad AD.

N B. In proportione continua Geometrica quadratum primi termini esse ad quadratum secundi, ut primus terminus ad tertium ex hac proportione continua evidens est $\div\!\!\div$ 1. a. a^2.

§. 64. *Prop.* 37. Sunto ID, FB, ordinatæ ad quamlibet diametrum ED parabolæ IAF; dico quadratum ID se habere ad quadratum FB, ut ab-

abſciſſa AD ad abſciſſam AB. Nam recta conjungens puncta IF occurret diametro AD in E extra parabolam, ſi ordinatæ DI, BF, ſint ex eadem parte diametri. In recta IE invento puncto G, ita ut quatuor puncta $IG\,FE$ harmonice dividant rectam IE; per punctum G ducta ordinata TGO, punctum T erit tactus contingentis TE, per *Prop.* 36, & TO producta ad alteram partem parabolæ biſecabitur in O, per *Prop.* 31. Propter parallelas ID, TO, FB, recta ED dividitur harmonice, in punctio E, B, O, D, & per *Prop.* 35. Diametri partes AO, AE, ſunt inter ſe æquales; quare per *Lemma* 7. quadratum ED eſt ad quadratum EB, ut AD ad AB; ſed quadratum ED eſt ad quadratum EB, ut quadratum DI ad quadratum BF; quare quadratum ID eſt ad quadratum BF, ut abſciſſa AD ad abſciſſam AB.

Si ordinatæ ID, FB, ad diverſas diametri partes poſitæ ſint, alterutra earum ducta ad alteram partem, demonſtratio erit eadem.

§. 65. In parabola tertia proportionalis ad abſciſſam & ordinatam dicitur parameter.

Prop. 38. In parabola quadratum cujuſvis ordinatæ æquale eſt rectangulo ſub parametro & abſciſſa. Eſto parameter AP, & erit $AB \times AP$. $AD \times AP$: : AB. AD : : quad. BF. quad. DI; ſed ex definitione parametri patet $AB \times AP$ eſſe æquale quadrato BF; ergo & $AD \times AP$ æquale eſt quadrato DI.

§. 66. *Lemma* 8. Si duæ rectæ ita ſint harmonice diviſæ, ut cum jungantur, alterna puncta divisionis A & C (Fig. 63.) coincidant; dico quadratum totius lineæ $a\,d$ esse ad tertiam ejus partem harmonicalem $a\,b$, ut rectangulum $d\,D \times d\,B$ ad rectangulum $b\,D \times b\,B$. Sint enim lineæ $A\,D$ & $a\,d$ harmonice divisæ in punctis $A\,B\,C\,D$ & $a\,b\,c\,d$, ita ut si jungantur, puncta alterna $A\,C$ & $a\,c$ coincidant. Bisecetur $A\,C$ in m, & erunt $m\,B$, $m\,C$, $m\,D$, item $m\,b$, $m\,c$, $m\,d$, continuo proportionales, per *Lemma* 6. & quoniam mediæ proportionales $m\,C$ & $m\,c$ sunt æquales, $m\,B \times m\,D$ æquale est $m\,b \times m\,d$; igitur $m\,D.\ m\,b :: m\,d.\ m\,B$, & dividendo $m\,D - m\,b = b\,D.\ m\,D :: m\,d - m\,B = d\,B.\ m\,d$. Similiter $m\,D.\ m\,d :: m\,b.\ m\,B$, & dividendo $m\,D - m\,d = d\,D.\ m\,D :: m\,b - m\,B = b\,B.\ m\,b$; & in utraq; proportione

$b\,D.\ m\,D :: d\,B.\ m\,d$, &

$d\,D.\ m\,D :: b\,B.\ m\,b$, transponendo & invertendo

$m\,d.\ m\,D :: d\,B.\ b\,D$. &

$m\,D.\ m\,b :: d\,D.\ b\,B$. igitur $m\,d \times m\,D.\ m\,D \times m\,b :: d\,B \times d\,D.\ b\,D \times b\,B$, hoc est, $m\,d.\ m\,b :: d\,B \times d\,D.\ b\,D \times b\,B$. Sed per *Lemma* 7. $m\,d$ est ad $m\,b$, ut quadratum $A\,d$ ad quadratum $A\,b$. Quare quadratum $A\,d$ est ad quadratum $A\,b$, ut rectangulum $d\,D \times d\,B$ ad rectangulum $b\,D \times b\,B$.

2) Sint lineæ $B\,C$ (Fig. 64.) & $a\,d$ harmonice sectæ in punctis $B\,A\,D\,C$ & $a\,b\,c\,d$, ita ut eis junctis puncta A & C cum punctis a & c coincidant; bisecetur $A\,C$ in m, & erunt $m\,D$, $m\,A = m\,C$, $m\,B$, item $m\,b$, $m\,c$, $m\,d$, continuo proportionales, & quia $m\,C$ & $m\,c$ sunt æquales, erit ut in priori casu $m\,D \times$

$m\,B$

$m\,B = mb \times md$; igitur $mD.\ mb :: md.\ mB$, & transſponendo, $mD.\ md :: mb.\ mB$, & in utraque componendo $mD. + mb = bD.\ mD :: md + mB = Bd.\ md.$ & $mD + md = dD.\ mD :: mb + mB = bB.\ mb.$ & in utraque tranſponendo & invertendo,

$md.\ mD :: Bd.\ bD$

& $mD.\ mb :: dD.\ bB$, igitur ut prius $md \times mD.\ mD \times mb :: Bd \times dD.\ bD + bB$, hoc eſt, quadratum Ad eſt ad quadratum Ab, ut rectangulum $dB \times dD$ ad rectangulum $bD \times bB$.

§. 67. *Prop.* 39. In ellipſi quadratum ordinatæ HE(Fig. 65.) eſt ad quadratum ordinatæ IF, ut rectangalum $BH \times HA$ ad rectangulum $BI \times IA$, ſub partibus diametri factis ab ordinatis. Recta FE conjungens puncta FE, erit diametro AB æquidiſtans, vel ei occurret in puncto D.

1) Occurrat in puncto D. Ducatur ordinata TO, ita ut DF, DI, ſint harmonice diviſæ, punctum T erit tactus contingentis DT, per *Prop.* 36. Scd etiam per *Coroll. Prop.* 36. recta DA dividitur harmonice in punctis $DBOA$, & in eadem recta altera diviſione harmonica exiſtente in punctis $DHOI$, utraq; habente puncta communia D & O; igitur, per *Lemma* ultimo præcedens, quadratum DH eſt ad quadratum DI, ſive quadratum HE ad quadratum IF, ut rectangulum $BH \times HA$ ad rectangulum $BI \times IA$.

2) Si EF eſt parallela diametro BA, ordinatæ HE, IF, ſunt inter ſe æquales; ergo & rectangula $BH \times HA$ & $BI \times IA$.

§. 68. In ellipsi post diametrum quamlibet & ei conjugatam tertia proportionalis continua dicitur parameter seu latus rectum. Rectangulum sub diametro qualibet & sua parametro comprehensum appellatur Figura hujus diametri.

§. 69. *Prop.* 40. (Fig. 66.) In ellipsi Quadratum cujusvis ordinatæ *HE* ad diametrum *AB* æquale est rectangulo *H N*, facto ex parametro *A P* in abscissam *AH*, demto rectangulo *QP* simili similiterq; posito figuræ hujus diametri *B P*. Sit enim diameter $BA=a$, Conjugata ejus $RD=b$; erit parameter $AP=\frac{bb}{a}$. Sit porro abscissa $HA=x$, & *HE* ordinata $=y$, & erit $BH=a-x$, $DC=\frac{b}{2}$, $CA=CB=\frac{a}{2}$, & per præcedentem Propositionem $yy.\ \frac{bb}{4}::ax-xx.\ \frac{aa}{4}$; igitur

$$\frac{yyaa}{4}=\frac{bbax}{4}-\frac{bbxx}{4}, \&\ yy=\frac{bbx}{a}-\frac{bbxx}{aa}.$$

Est vero $\frac{bbx}{a}$ rectangulum ex parametro $\frac{bb}{a}$ in abscissam x, & $\frac{bbxx}{aa}$ est rectangulum ex QN $=x$ in $NP=\frac{bbx}{aa}$, quæ est quarta proportionalis ad diametrum a, parametrum $\frac{bb}{a}$ & abscissam x.

Coroll.

Coroll. Quoniam *B H* se habet ad *H Q*, ut diameter *B A* ad parametrum *A P*, ergo & rectangulum *B H*×*H A* se habet ad quadratum, *H E* quod est æquale rectangulo *H Q* × *H A*, ut diameter ad parametrum.

§. 70. *Prop.* 41. Si sint ordinatæ *HE*, *I F*, (Fig. 67.) ad quamlibet productam diametrum terminatam *A B* hyperbolæ; dico quadratum *H E* se habere ad quadratum *I F*, ut rectangulum *A H*×*B H* ad rectangulum *A I*×*B I*, sub partibus diametri factis ab ordinatis. Si sint ordinatæ *H E*, *I F* ex eadem parte diametri, recta *F E* occurret diametro in *D* extra sectionem. Ducta ordinata *T O*, ita ut *D F* sit divisa harmonice in punctis *D E L F*, & *D I* in punctis *D H O I*; *T D* erit tangens in puncto *T*, & diameter *A B* prolongata dividitur harmonice in punctis *A D B O*, per *Coroll. Prop.* 36. Quare cum puncta *D* & *O* sint communia utriq; divisioni *A D B O* & *DHOI*, per *Lemma* 8. quadratum *D H* est ad quadratum *D I*, ut rectangulum *A H*×*BH*, ad rectangulum *A I*×*B I*; sed quadratum *D H* est ad quadratum *D I*, ut quadratum *E H* ad quadratum *I F*; ergo quadratum *E H* est quadratum *I F*, ut rectangulum *A H*×*B H* ad rectangulum *A I*×*B I*.

§. 71. Producta diametro determinata Hyperbolæ *A B* (Fig. 68.) in *a*, ita ut *A B* sit æqualis *A a*, & ex puncto *a* agatur ordinata *a D*, recta *A P* dimidia pars rectæ *A p*, tertiæ proportionalis continuæ post diametrum *A B* & ordinatam *a D*, dicitur parameter seu latus rectum ejusdem diametri. Rectangulum sub diametro *A B* &

sua

ſua parametro AP vocatur figura hujus diametri.

§. 72. *Prop.* 42. In hyperbola quadratum cujuſvis ordinatæ HE ad diametrum AB æquale eſt rectangulo ex parametro $A\mathcal{P}$ in abſciſſam AH, addito rectangulo $\mathcal{P}Q$ ſimili, ſimiliterq; poſito figuræ hujus diametri. Sit diameter $AB=a$, $HE=y$, $aD=b$; erit parameter $AP=\frac{bb}{2a}$. Sit porro abſciſſa $AH=x$, & $Aa=a$; erit $BH=a+x$, & $Ba=2a$, & per *Prop.* præced. $ax+xx.\ 2a^2::yy.\ bb.$ Quare $axbb+xxbb=2aayy$, & $yy=\frac{bbx}{2a}+\frac{xxbb}{2aa}$, hoc eſt, quadratum ordinatæ yy æquale eſt rectangulo ex parametro $\frac{bb}{2a}$ in abſciſſam x, & rectangulo ex abſciſſa x in $\mathcal{P}N=\frac{bbx}{2aa}$, quæ eſt quarta proportionalis poſt diametrum a, paramentrum $\frac{bb}{2a}$ & abſciſſam x.

Coroll. Quoniam BH eſt ad HQ, ut diameter ad parametrum, ergo & rectangulum $BH\times HA$ eſt ad rectangulum $HQ\times HA$, ſive quadratum HE, ut diameter ad parametrum.

§. 73. Diameter DG, ad quam ordinatæ pF, $\mathcal{P}O$, (Fig. 69.) ſunt perpendiculares, axis dicitur.

Ducta

Fig: 62.

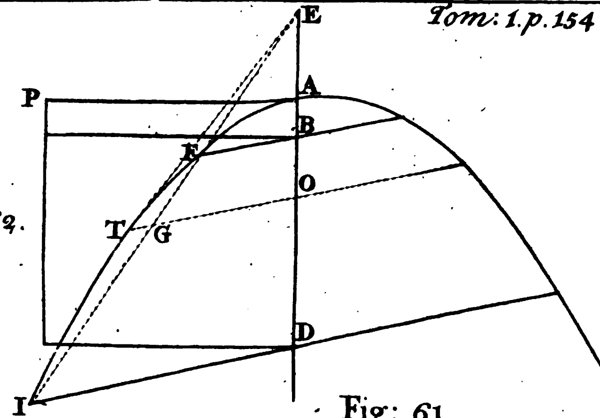


Fig: 61.

Fig: 63.

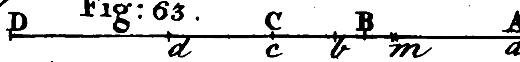
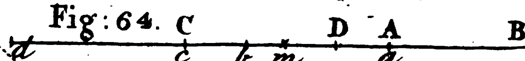


Fig: 64.



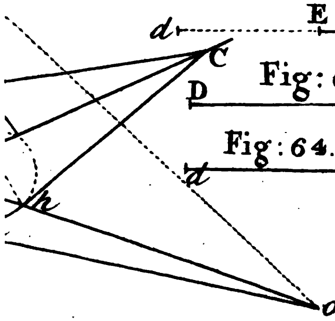


Fig: 66.

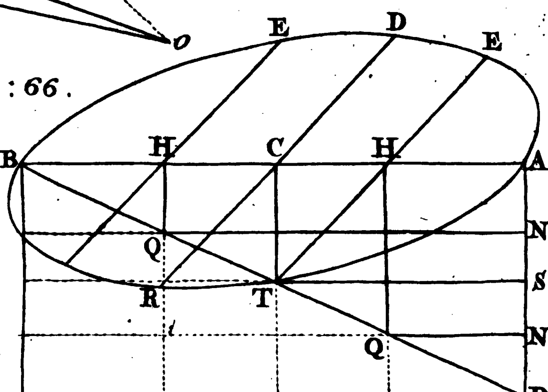
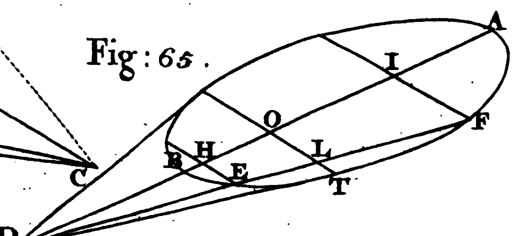
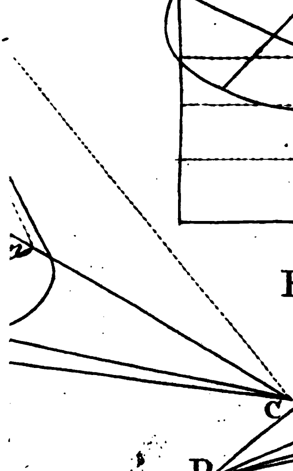


Fig: 65.





Ducta recta *PG* contingente parabolam in quolibet puncto *P*, & occurrente axi *D F* in *G*, bisecta *P G* in *E*, & ex hoc puncto erecta perpendiculari *E F* ad *P G* usque ad axem in *F*; punctum *F*, focus parabolæ vocatur.

§. 74. *Prop.* 43. Ducta contingente *P G* ad punctum parabolæ *P*, & erecta ex hoc puncto *P* perpendiculari *P D* ad contingentem *P G*, & ordinata *P O* ad axin *A O*; dico *O D* esse æqualem semiparametro axis. Nam per *Prop.* 35. *A O*, *A G*, sunt inter se æquales, & per *Prop.* 38. quadratum ordinatæ *P O* est æquale rectangulo sub abscissa *AO* & parametro, aut quod idem est, rectangulum sub *O G* & semiparametro; & ob similitudinem triangulorum *P D O*, & *P O G*, quadratum *P O* æquale est rectangulo $OD \times OG$; igitur *O D* est æqualis semiparametro.

§. 75. *Prop.* 44. Distantia foci a termino parabolæ est quadrans parametri. Ducatur enim ex puncto *P* recta *P D* perpendicularis ad contingentem *P G*, & ex eodem puncto *P* ac termino parabolæ *A* perpendiculares *P O*, *E A*, ad axin *A D*; & erit propter similitudinem triangulorum *E G F*, & *P G D*, recta *E F* dimidium rectæ *P D*; item propter similitudinem triangulorum *F E A* & *D P O*, *F A* dimidium *D O*; sed per *Prop.* præced. *D O* est dimidium parametri ergo *F A* est quadrans ejusdem.

§. 76. *Prop.* 45. Si per quodlibet punctum *P* parabolæ agantur diameter *P C*, recta *P F* ad focum, & tandem contingens *H P G* in eodem puncto *P*; dico angulum *F P G* æqualem esse

angulo

angulo $C P H$. Sit abscissa $A O = x$, parameter $= b$, & erit per *Prop.* 38. quadratum $P O = b x$, $O F = x - \frac{b}{4}$, per *Prop.* præc. cujus quadratum est $= xx - \frac{bx}{2} + \frac{bb}{16}$, & quad. $P F = xx + \frac{bx}{2} + \frac{bb}{16}$, cujus radix est $= x + \frac{b}{4} = P F$; sed per *Prop.* 35. $A G$ est æqualis $A O$, ergo $A G + A F$ est etiam $x + \frac{b}{4}$; igitur $P F$ & $F G$ sunt æquales, per consequens & anguli $F P G$, & $F G P$, per *Prop.* 11. Et quoniam recta $C P$ est parallela rectæ $D G$, anguli $H P C$, & $H G D$, sunt æquales per *Prop.* 4. quare & anguli $H P C$, & $F P G$.

§. 77. In ellipsi & hyperbolis oppositis descripto circulo $B C A$ (Fig. 70. & 71.) super diametro $A B$, & ducta qualibet contingente $C T D$ in puncto T & occurrente circulo in C & D, si ex his punctis agantur perpendiculares $C F$, $D H$, ad contingentem usque ad axin in F & H, puncta hæc F & H dicuntur Foci ellipseos vel hyperbolarum oppositarum. Ex qua generatione focorum liquet, eos a centro ellipseos vel hyperbolarum O æquis distare intervallis: Nam ducta ex centro O perpendiculari $O a$, hæc ipsa bisecat chordam $C D$ in a, & propter $F C$, $O a$, $H D$ parallelas, $D a$ est ad $a C$, ut $H O$ ad $O F$; igitur $H O$ & $O F$ sunt inter se æquales.

§. 78. *Prop.* 46. Si a focis F & H ellipseos & hyperbolarum oppositarum rectæ $F T$, $H T$, ducantur

cantur ad quodlibet punctum *T* sectionis, & per idem punctum *T* agatur contingens *I T E*; dico angulos *F T I*, *H T E*, esse inter se æquales. Nam per punctum *T* ducta *T L* ordinata ad axin, per *Coroll. Prop.* 36. axis *B E* dividitur harmonice in punctis *B L A E*, si contingens occurrat axi in *E*; ductis perpendicularibus *F C*, *H D*, ex focis *F* & *H* ad contingentem *E C*, puncta occursus *C* & *D* erunt in peripheria circuli *B C D A* per ipsam generationem focorum; sed pro ellipsi, per *Coroll. Lemma* 3. recta *L T* conjunget tactus ad circulum contingentium a puncto *E*; recta enim *E B* dividitur harmonice in punctis *E A L B*, sed per ipsum *Lemma* tertium recta *E C* dividitur etiam harmonice in punctis *E D T C*; & pro hyperbola, per *Lemma* 4. demonstr. recta *T C* dividitur harmonice in punctis *T D E C*; & in utraque sectione propter parallelas *C F. D H*: : *C E. D E*; & propter divisionem harmonice *C E. D E*: : *T C. T D*; & similiter propter similia triangula *T C F*, & *T S D*, *T C. T D*: : *C F. D S*; quare ex æquo *C F. D H*: : *C F. D S*. Erunt igitur *D S* & *D H* inter se æquales; sed recta *S D H* ducta fuit perpendicularis ad contingentem *T E*; quare ob similia & æqualia triangula anguli *H T E*, & *F T I*, sunt inter se æquales. Si contingens axi est parallela *F T*, & *H T*, sunt æquales, quare anguli *T F H*, & *T H F*, sunt inter se, & angulis alternis *F T I*, & *H T D*, æquales.

§. 79.

§. 79. *Lemma* 9. Sit linea *A D* (Fig. 72.) harmonice divisa in punctis *A B C D*, & duæ ejus partes contiguæ *A B* & *B C* simul sumtæ bifariam divisæ in *m*; dico *B C* esse ad *B D* ut *m B* ad *A B*; item *D C* esse ad *D B* ut *D m* ad *D A*. Etenim per *Lemma* 6. *m B*, *m C*, *m D* sunt in continua proportione, hoc est
$mB.\ mB+BC::mC.\ mC+CD$; ergo dividendo
$mB.\ BC::mC.\ CD$; transponendo & invertendo
$BC.\ CD::mB.\ mC$; & componendo
$BC.\ BC+CD::mB.\ mB+mC=AB$, quod erat prius.
Invertendo proportionem $BC.\ CD::mB.\ mC$, erit
$CD.\ BC::mC.\ mB$, & componendo
$CD.\ CD+BC::mC.\ mC=Am+mB$, hoc est
$CD.\ BD::mC.\ AB$, & junctis rationibus
$CD.\ BD::mC+CD.\ AB+BD$, hoc est
$CD.\ BD::mD.\ AD$. quod erat alterum.

§. 80. *Lemma* 10. Sit linea *B A* (Fig. 73.) bifariam divisa in *C*, & pro lubitu prolongata in *O*; dico rectangulum $BO \times AO$ esse æquale quadrato *C O* demto quadrato *C A*. Sit enim $BC=CA=a$, & $AO=x$; erit $CO=a+x$, & quadratum ejus $aa+2ax+xx$, subtracto quadrato $CA=aa$, remanet $2ax+xx$, quod est æquale rectangulo sub $BO=2a+x$, & $AO=x$.

§. 81. *Prop.* 47. Si a terminis *A B* (Fig. 74, & 75.) diametri cujuslibet ellipseos vel hyperbolæ ducantur contingentes *A K*, *B I*, & alia quælibet contingens *D T* occurrens prioribus in *K* & *I*; dico rectangulum $AK \times BI$, esse æquale quadrato *C F* semidiametri conjugatæ diametro *A B*, quod

quod eſt quarta pars figuræ ejuſdem diametri *A B*.

1) In ellipſi a contactu *T* ducta ordinata *T O* ad diametrum *A B*, & *T E* ipſi *A B* parallela. Si tangens *D T* occurrat diametro *B A D*, hæc ipſa eſt harmonice ſecta in punctis *B O A D*, per *Coroll. Prop.* 36. & duæ partes contiguæ *B O* & *A O*, biſariam diviſæ a centro *C*; quare per *Lemma* 9. *B D*. *C D*: :*O D*. *A D*, & propter parallelas *B I*. *C G*: :*O T*. *A K*; quamobrem $B\,I \times A\,K = C\,G \times O\,T = C\,G \times C\,E$. Sed per *Lemma* 6. *G F*, *G E*, *G C*, ſunt in continua proportione, quia diameter *G F*, eſt harmonice ſecta a contingente *T G* in *G*, a ſectione in *F* & *f*, & ab ordinata *T E* in *E*, duæque partes contiguæ *f E*, & *E F*, biſariam ſunt diviſæ a centro *C*; igitur quadratum *C F* æquale eſt rectangulo $C\,G \times C\,E$; ergo quadratum *C F* æquale eſt rectangulo $B\,I \times A\,K$.

Si tangens *D T* eſt diametro *B A* parallela; tunc *B I* & *H K* ſunt æquales ſibi invicem & diametro *C F*, & hoc caſu propoſitio per ſe eſt evidens.

2) In hyperbola diameter *B O* harmonice eſt ſecta in punctis *B D A O*, & partes contiguæ *BD* & *D A* biſariam diviſæ a centro *C*; quare *C D*, *C A*, *C O*, ſunt in continua proportione per *Lemma* 6. igitur *C D* eſt ad *C O* ut quad. *C A* ad quad. *C O*; & dividendo $C\,O - C\,D = D\,O$ ad *C D*, ut quad. *C O*—quad. *C A* = rectang. $B\,O \times O\,A$, per *Lemma* 10. ad quad. *C A*. Sed per *Coroll. Prop.* 42. rectang. $B\,O \times O\,A$, eſt ad quad.

O T,

OT, ut diameter BA ad parametrum suam, vel ut semidiameter CA ad semiparametrum. Sed semidiameter CA est ad suam semiparametrum, ut quad. CA ad quartam partem figuræ, hoc est, rectangulum sub CA & semiparametro, propter communem altitudinem CA; quare ex æquo rectang. $BO \times OA$, ad quad. OT, ut quad. CA ad quartam partem figuræ, vel rectang. $BO \times OA$, ad quad. CA, ut quad. OT ad quartam partem figuræ; quare etiam ex æquo DO ad CD ut quad. OT ad quartam partem figuræ. Per *Lemma* 9. $DA. DO :: DC. DB$. A centro C ducta CR parallela BI, erit $AK. OT :: CR. BI$; quare rectang. $AK \times BI =$ rectang. $OT \times CR$. Sed est OT ad CR, ut quad. OT ad rectang. $OT \times CR$; & ut OT ad CR sic DO ad DC; quamobrem quad. OT ad rectang. $OT \times CR = AK \times BI$, ut DO ad DC, vel ex superius ostensis ut quad. OT ad quartam partem figuræ diametri AB. Igitur rectangulum $AK \times BI$ æquale est quartæ parti figuræ.

§. 82. *Prop.* 48. In ellipsi & hyperbola rectang. $AF \times BF$ (Fig. 70, & 71.) vel $AH \times BH$ sub partibus axis inter focum alterutrum & ipsius terminos erit æquale quartæ parti figuræ ejusdem axis. Etenim ex punctis A & B erectis BI, AG, perpendicularibus usq; ad contingentem in I & G; per *Prop.* præced. rectangulum $AG \times BI$ æquale est quartæ parti figuræ axis AB; sed si contingens non sit parallela axi AB in ellipsi, propter similitudinem triangulorum rectangulorum EB est ad EC, ut BI ad CF, & EB ad EC ut ED ad EA

per

per *Prop.* 15. & propter triangula rectangula ſimilia *E D* ad *E A*, ut *D H* ad *G A*; quamobrem ex æquo *B I* ad *C F*, ut *D H* ad *G A*, & rectang. $BI \times GA$ erit æquale rectangulo $CF \times DH$, idque æquabitur quartæ parti figuræ. Sed propter perpendiculares *C b*, *D d*, ad chordam *D C* æquales, diameter his occurrens intra vel extra circulum productis, ex iiſdem partes æquales *Fb*, *D H*, & *F C*, *d H*, abſcindet; quare rectang. $CF \times DH$ erit æquale rectang. $CF \times Fb$, vel $DH \times dH$, quod etiam æquale eſt rectang. $BF \times AF$, vel $AH \times BH$, per *Coroll.* 2. *Prop.* 15. quæ propterea ſunt æqualia quartæ parti figuræ.

Si in ellipſi contingens *C T D* eſt parallela axi, perpendiculares *F C*, *H D*, erunt æquales ſemiaxi minori *O M*, cujus quadratum eſt æquale quartæ parti figuræ; quare rectang. $CF \times HD$, quod eſt æquale rectangulo $BF \times AF$ æquabitur quartæ parti figuræ.

§. 83. *Prop.* 49. In omni ſectione conica ſi ab utrovis foco erigatur *F p* ordinata ad axin; dico hanc ordinatam æqualem eſſe dimidio parametri axis. 1) In parabola ſit parameter $= a$, abſciſſa *F A*, ſive diſtantia foci a termino axis erit $= \frac{1}{4} a$, per *Prop.* 44. Sit porro ordinata ad focum $pF = y$, & erit $yy = \frac{1}{4} aa$, per *Prop.* 38. igitur $y = \frac{1}{2} a$. 2) In ellipſi & hyperbola ſit dimidium axis $AO = \frac{1}{2} a$, dimidium axis minoris $OM = \frac{1}{2} b$, cujus quadratum $\frac{bb}{4}$ eſt quarta pars figuræ. Ponatur diſtantia foci a termino ſectionis $AH = x$; erit *B H*, $a - x$ in ellipſi, & $a + x$, in hyperbola;

erit etiam $ax-xx$ in ellipsi, & $ax+xx$ in hyperbola $=\frac{bb}{4}$ per *Prop.* præced. Ponatur denique ordinata $Fp=y$, & erit $yy.\frac{bb}{4}::\frac{bb}{4}.\frac{aa}{4}$ per *Prop.* 39, & 41. igitur $\frac{yyaa}{4}=\frac{bbbb}{16}$; & $yy=\frac{b^4}{4aa}$; & $y=\frac{bb}{2a}$, hoc est dimidium tertiæ proportionalis post axin majorem a, & minorem b, quod est dimidium parametri.

§. 84. *Prop.* 50. In ellipsi distantia focorum a centro est æqualis dimidio mediæ proportionalis inter axin & differentiam axis a parametro sua. Esto enim axis ellipsis $=a$, parameter $=b$; erit ordinata in ipso foco $\frac{b}{2}$; esto abscissa $FA=x$, & erit per *Prop.* 40. $\frac{bb}{4}=bx-\frac{bxx}{a}$; dividatur æquatio hæc per b, & erit $\frac{b}{4}=x-\frac{xx}{a}$; multiplicetur per a, & erit $\frac{ab}{4}=ax-xx$, mutatisque signis $-\frac{ab}{4}=xx-ax$; addatur $\frac{aa}{4}$, & extrahatur radix, eritque $\mp\sqrt{\frac{aa-ab}{4}}=\mp x\mp\frac{a}{2}$; ergo x sive

distan-

distantia foci a termino axis est $\frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{aa - ab}{4}}$; igitur distantia focorum a centro est $\sqrt{\frac{aa - ab}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{aa - ab}$, hoc est dimidium mediæ proportionalis inter axin a, & differentiam axis a parametro $a - b$.

Coroll. Eodem modo demonstratur distantiam focorum a centro in hyperbolis oppositis esse dimidium mediæ proportionalis inter axin transversum AB, & inter summam ejusdem ac parametri suæ, hoc est, si axis transversus ponitur $= a$, & parameter $= b$, distantia focorum a centro erit $\frac{1}{2}\sqrt{aa + ab}$.

§. 85. *Prop.* 51. Duæ rectæ TF, TH, (Fig. 70.) quæ ex puncto quovis ellipsis T, ducuntur ad focos F & H, simul sumtæ æquales sunt axi BA. Sit enim distantia focorum a centro $O = c$. Abscissa $LA = x$; sit axis major $AB = a$, parameter $= b$; erit axis minor $= \sqrt{ab}$, & $c = \sqrt{\frac{aa - ab}{4}}$ per *Prop.* præced: Jam si duæ istæ rectæ a termino axis minoris M ducuntur, FOM est triangulum rectangulum; igitur quadratum FO additum quadrato OM æquale est quadrato FM hoc est, $\frac{aa - ab}{4} + \frac{ab}{4} = \frac{aa}{4}$, cujus radix $\frac{a}{2}$ est $= FM$;

 eodem

eodem modo probatur $M\ H$ esse $=\frac{a}{2}$; ergo $FM + MH = a$.

Sit punctum sectionis T, ex quo ducatur ordinata TL, sit $O\ H = FO = c$, & $L\ A = x$; erit $HA = a - c$, & $L\ H = x - \frac{a}{2} + c$, $F\ L = c + a - x$. Jam vero $B\ O + O\ A$. quad. $O\ M$: : $B\ L \times L\ A$. quad. $L\ T$, per *Prop.* 39. hoc est, $\frac{aa}{4}$. $\frac{aa}{4} - cc$: : $ax - xx$. $\frac{4a^3x - 4aaxx}{4aa} - \frac{4accx + 4ccxx}{aa} = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa} =$ quad. TL. Addatur huic quad. $L\ H = xx - ax + \frac{aa}{4} + 2cx - ac + cc$, & erit $\frac{aa}{4} - ac + cc + 2cx + \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa} =$ quad. $T\ H$, cujus radix est $\frac{a}{2} - c + \frac{2\,c\,x}{a} = T\ H$. Eodem modo si quadrato $F\ L = cc + ca + \frac{aa}{4} - 2cx - ax + xx$ addis quadratum $T\ L = ax - xx - \frac{4ccx}{4} + \frac{4ccxx}{aa}$, habes quadratum $F\ T = cc + ca + \frac{aa}{4} - 2cx - \frac{4ccx}{4} + \frac{4ccxx}{aa}$, cujus radix est $= c + \frac{a}{2} - \frac{2cx}{a} = FC$, ad-

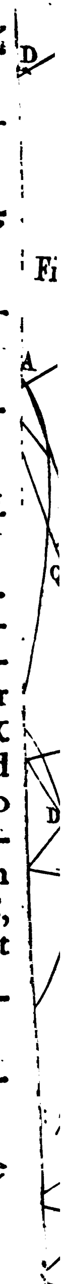
datur

datur huic $TH = \frac{a}{2} - c + \frac{2cx}{a}$, summa erit $= a$.

§. 86. *Prop.* 52. Differentia duarum rectarum (Fig. 71.) FT, HT, quæ ex focis F & H hyperbolarum oppositarum ad punctum quodvis in sectione T ducuntur, æqualis est axi transverso AB. Sit enim axis transversus $= a$, parameter $= b$, distantia focorum a centro $OH = FO = c$, abscissa $AL = x$; & erit $HL = x - c + \frac{a}{2}$, $FL = c + \frac{a}{2} + x$, mediaque proportionalis inter axem transversum & parametrum $= \sqrt{ab}$, quæ dicitur axis minor. Et quoniam in proportione continua primus terminus est ad tertium, ut quadratum primi termini ad quadratum secundi, & per *Prop.* 42. *Coroll.* rectangulum $BL \times AL$, est ad quadratum ordinatæ TL, ut diameter sive axis transversus ad parametrum, denique per *Prop.* 50. *Coroll.* $cc = \frac{aa + ab}{4}$, per consequens $cc - \frac{aa}{4} = \frac{ab}{4}$; igitur $\frac{aa}{4} . cc - \frac{aa}{4} :: ax + xx . \frac{4ccax + 4ccxx - 4a^3x - 4aaxx}{4aa} = -ax - xx + \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa} =$ quad. TL. Addatur quad. $HL = xx - 2cx + cc + ax - ac + \frac{aa}{4}$, summa erit $= cc - ac + \frac{aa}{4} - 2cx +$

$\frac{4ccx}{a}+\frac{4ccxx}{aa}$, cujus radix eſt $=c-\frac{a}{2}+\frac{2cx}{a}=HT$. Eodem modo addatur ad $-ax-xx+\frac{4ccx}{a}+\frac{4ccxx}{aa}$ quadratum $FL=cc+ac+\frac{aa}{4}+2cx+ax+xx$, ſumma erit $=cc+ac+\frac{aa}{4}+2cx+\frac{4ccx}{a}+\frac{4ccxx}{aa}$, cujus radix eſt $=c+\frac{a}{2}+\frac{2cx}{a}=FT$. Subtrahatur $FT=c-\frac{a}{2}+\frac{2cx}{a}$; erit differentia $=a$.

§. 87. *Prop.* 53. Quodſi axis minor *B b* (Fig. 76.) ad terminum *A* axis hyperbolæ ita applicetur, ut ſit perpendicularis ad axem *C A*, & a termino axis biſecetur, ducanturque ex centro *C* per extremitates axis minoris *B* & *b* rectæ *C B F*, & *C b f*; dico has rectas eſſe aſymptotos, *h. e.* ad hyperbolam propius ſemper accedere, eam vero nunquam contingere; eſſe enim differentiam inter quadratum ordinatæ cujuſvis ad aſymptotum *F E* & quadratum ordinatæ ad hyperbolam *GE*, æqualem quadrato dimidii axis minoris *A B*. Sit enim dimidium axis $CA=\frac{a}{2}$, dimidium parametri $=\frac{b}{2}$; erit dimidium axis minoris $\sqrt{\frac{ab}{4}}$, ejuſque



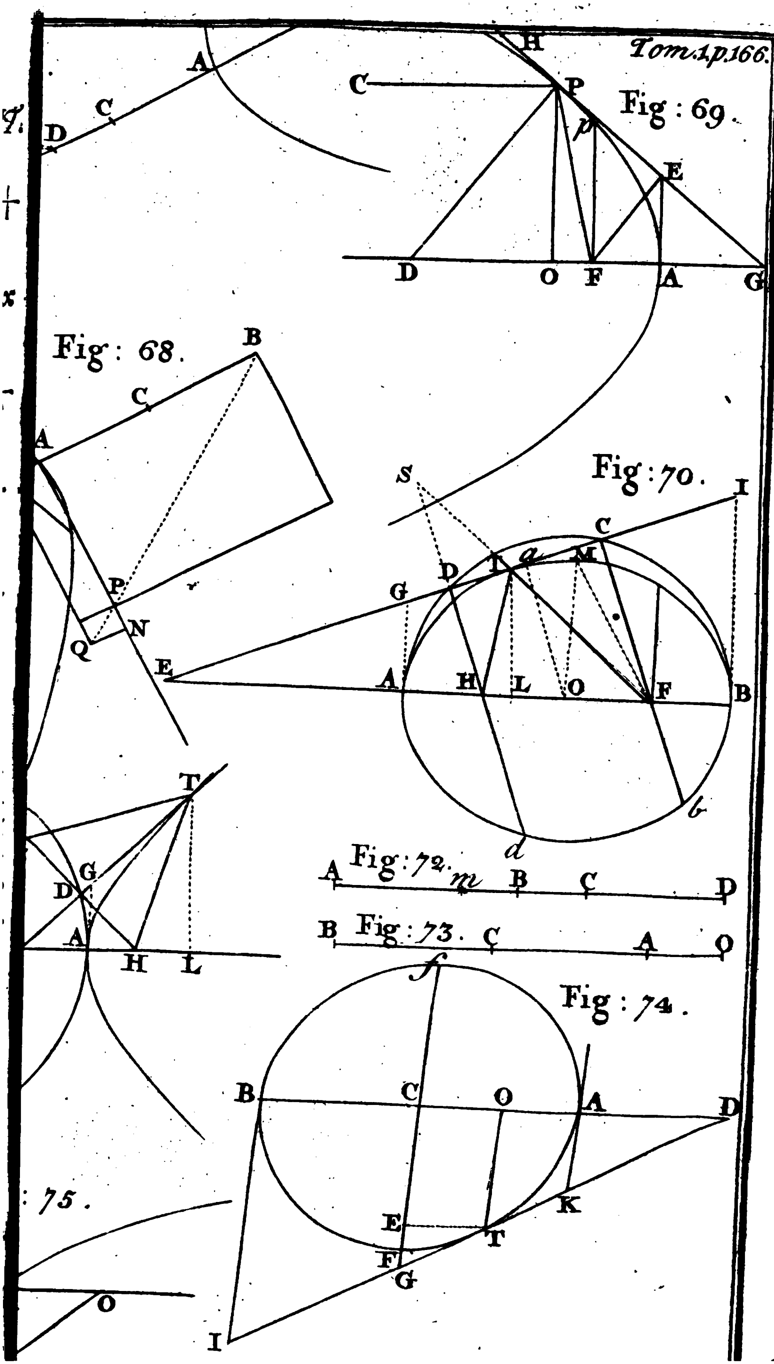


Fig: 68.
Fig: 69.
Fig: 70.
Fig: 72.
Fig: 73.
Fig: 74.
: 75.

juſque quadratum $\frac{ab}{4}$. Sit abſciſſa $AE = x$, erit $CE = \frac{a}{2} + x$, & propter triangula CAB, & CEF ſimilia, $\frac{a}{2} . \sqrt{\frac{ab}{4}} :: \frac{a}{2} + x . \sqrt{\frac{ab}{4}} + \frac{2x}{a} \times \sqrt{\frac{ab}{4}} = FE$, cujus quadratum eſt $= \frac{ab}{4} + xb + \frac{xxb}{a}$; ſed per *Prop.* 42. quadratum ordinatæ GE eſt $= xb + \frac{xxb}{a}$; ergo ſi hoc quadratum ab illo ſubtrahis remanet differentia, $\frac{ab}{4}$, æqualis quadrato ſemiaxis minoris.

§. 88. *Prop.* 54. Ducantur rectæ LG, MI, parallelæ cum aſymptoto Cf, & GN, IO, parallelæ cum aſymptoto CF; dico LG eſſe ad IM, ut IO ad GN, ſive MC ad LC. Sit enim $FE = a$, $GE = b$, $HK = c$, & $IK = d$; erit per *Prop.* præced. $aa - bb = cc - dd$; quare $a - b . c - d :: c + d . a + b$, hoc eſt, $FG . HI :: hI . fG$; & propter ſimilitudinem triangulorum OIh, & NGf, ut IO ad GN; item ob triangula MIH & LGF ſimilia, $FG . HI :: LG . MI$; igitur LG ad MI ut OI ad NG, ſive ut CM ad CL. *Coroll.* 1. Ergo rectangula $CL \times LG$, & $CM \times MI$, ſunt æqualia.

Coroll. 2. Ducantur ex termino axis A rectæ AD, Ad, & ſit $AD = CD = a$, $DL = x$, $LG = y$; erit $a . a + x :: y . a$; igitur $aa = ay + yx$, quæ æ-

 quatio

quatio naturam hyperbolæ intra asymptotos exponit.

§. 89. Ex hactenus demonstratis methodus elucet puncta sectionis cujusvis inveniendi. Sit ergo

Prob. 1. Positione ad tangentem parabolæ *A F* (Fig. 77.) & puncto *M*, per quod parabola transire debet, datis, omnia reliqua puncta parabolæ invenire? Ducatur per punctum *M* recta *F M* parallela cum diametro *A R*, & dividatur *A F* in quotcunque partis æquales, secetur itidem *F M* in totidem partes æquales; ducantur porro ex puncto *A* per omnia puncta sectionis rectæ *F M*, rectæ *A M*, *A L*, *A I*, &c. & ex punctis sectionis rectæ *A F*, ducantur rectæ *B S*, *C T*, *D V*, &c. parallelæ cum diametro *A R*, puncta *S*, *T*, *V*, *X*, in quibus hæ parallelæ *B S*, *C T*, *D V*, *E X*, conveniunt cum rectis *A G*, *A H*, *A I*, *A L*, sunt puncta parabolæ. Ducantur ex punctis *S*, *T*, *V*, *X*, parallelæ cum tangente *AF*, & fiat *N s* æqualis *N S*, *O t* æqualis *O T*, &c. & erunt puncta *s*, *t*, *u*, *x*, itidem in parabola. Sit enim *A B* quinta pars lineæ *A F*, erit *B S*, etiam quinta pars lineæ *F G*, & vigesima quinta lineæ *F M*; sunt vero *B S* & *F M* æquales abscissis *AN* & *AR*, item *A B*, *A F*, æquales ordinatis *N S*, *R M*; ergo abscissæ *A N* & *A R*, sunt inter sese ut 1 ad 25, hoc est, ut quadrata ordinatarum 1 & 5, quæ est natura parabolæ per *Prop.* 37. Quare puncta *S* & *M*, sunt in parabola. Eadem demonstratio in reliquis punctis *T*, *V*, *X*, obtinet. Sed & ordinatæ *N S*, *O T*, *P V*, &c. æquales sunt ordinatis *N s*, *O t*, *P u*, &c. ad eandem dia-

diametrum *AR*, per *Prop.* 31. igitur & puncta *s*, *t*, u, *x* sunt in parabola.

§. 90. *Problema* 2. Dato axe & ejus conjugato sive axe minori omnia puncta ellipsis invenire? Applicetur axis minor *CD*(Fig. 78.) ad axem majorem *AB*, ita ut seinvicem perpendiculariter bisecent in *O*, quod erit centrum ellipsis; capiatur dimidium axis majoris *AO*, & transferatur ex puncto extremo axis minoris *C* in puncta axis majoris *F* & *H*; capiatur deinde circino pars aliqua axis majoris, & describatur hac apertura circini ex alterutro focorum *F* arcus, capiatur deniq; altera pars axis, & describatur hac apertura circini ex altero foco *H* arcus priorem secans in *E*, erit punctum *E* in ellipsi. Eodem modo reliqua puncta inveniuntur. Nam per *Prop.* 51. duæ rectæ ex focis ad quodlibet punctum ellipsis ductæ, simul sumtæ, æquales sunt axi majori.

§. 91. *Problema* 3. Data diametro *AB*, (Fig. 79.) & ejus conjugata *ED*, earumq; positione ad se invicem omnia puncta ellipsis invenire?

Ducatur per extremitatem diametri conjugatæ *DE* recta *PDQ* perpendicularis ad diametrum *AB*, & fiat *DQ* æqualis dimidio ejusdem diametri *AC*; ducatur etiam recta ex puncto *Q* bisecans diametrum *AB* in *C*, quod est centrum ellipsis. Ducatur porro recta *GOI* parallela rectæ *QP*, secans diametrum conjugatam *ED* in *O*, & rectam *QC* in *G*, & per punctum *O* ducatur recta *SO* parallela diametro *AB*; deniq; capiatur circino semidiamiter *AC*, & transferatur ex puncto *G* in *S*, quod est punctum in recta *SO* & in in ipsa ellipsi; eodem modo reliqua puncta inveniuntur. Nam quadratum CD est ad quadratum CO sive RS, ut quad. $DQ = GS = AC$ ad quadratum OG. Quad. OG æquale est quadrato GS demto quad. SO, sive quadrato CA demto quadrato CR, per *Prop.* 25. Quadratum CA, demto quadrato CR, æquale est rectangulo $BR \times RA$, per *Lemma* 10. Igitur quadratum CD est ad quad. RS, ut quadratum CA ad rectang. $BR \times RA$, quæ est proprietas ellipsis per *Prop.* 39.

§. 92. *Problema* 4. Data positione asymptotorum AB & AC (Fig. 80.) ac puncto D hyperbolæ reliqua puncta ejusdem hyperbolæ invenire?

Ducatur per punctum D recta EDF, terminans in utraq; asymptoto in E & F, & fiat ED æqualis FG, punctum G erit in hyperbola. Eodem modo ducatur per punctum G, recta terminans in punctis asymptotorum H & I, & fiat GI æqualis HL, punctum L erit itidem in hyperbola. Nam eadem diameter AM ordinatam hyperbolæ DG æque ac ordinatam asymptotorum EF bifariam dividit; igitur ED æqualis est EF.

De Quadratura Curvarum.

§. 93. Quadratura Curvæ est determinatio spatii sive areæ intra curvam ejusq; ordinatam & abscissam; e.g. Sit curva AB, (Fig. 81.) ejus abscissa AD, *A D*, & ordinata *D B*, ſpatii intra has lineas determinatio eſt quadratura illius curvæ. Spatium hoc generatur motu parallelo ordinatæ *D B*, in directione abſciſſæ *A D*, ita ut ipſa ordinata ſit in continuo fluxu, hoc eſt, continuo augeſcens aut decreſcens; quod qua ratione fiat, ex ipſa æquatione curvæ naturam explicante patet. Fluxio ergo generalis ſeu ratio velocitatis, qua ſpatium hoc motu ordinatæ generatur, in omnibus curvis eſt æquale producto ex ordinata in Fluxionem abſciſſæ. Sit ergo ordinata $DB = y$, abſciſſa $= x$; Fluxio ejus erit $\dot{x}$, & Fluxio ſpatii contenti intra curvam ejuſq; ordinatam & abſciſſam $y\dot{x}$. Quodſi ergo loco y, ex ipſa æquatione curvæ ſpecialis valorem ejus ſubſtituis, habebis Fluxionem ſpatii contenti intra ſpecialem illam curvam ejuſq; ordinatam & abſciſſam, cujus Fluxionis quantitas fluens eſt illud ipſum ſpatium.

§. 94. Sit curva propoſita parabola, æquatio ejus per *Prop.* 38. eſt $yy = ax$, ergo $y = \sqrt{ax}$. Subſtitue ergo loco y, in Fluxione generali $y\dot{x}$, valorem ejus $\sqrt{ax}$, & erit $\dot{x}\sqrt{ax}$ Fluxio ſpatii parabolici. Eſt vero $\sqrt{ax} = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; ergo $\dot{x}\sqrt{ax}$ $= \dot{x}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, cujus quantitas fluens eſt $= \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}$ $x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{ax} \times x = \frac{2}{3}yx$. Ergo

Prop.

Prop. 55. Spatium parabolicum est ad parallelogrammon sub ordinata & abscissa ut 2 ad 3.

§. 95. Æquatio ellipsis est per *Prop.* 39. $aayy = bbaa - bbxx$; ergo $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$, & $y = \sqrt{bb - \frac{bbxx}{aa}}$; quamobrem Fluxio spatii elliptici est $\dot{x}y = \dot{x}\sqrt{bb - \frac{bbxx}{aa}}$. Sed per regulam extractionis radicis binomicæ $\sqrt{bb - \frac{bbxx}{aa}}$ est $= b - \frac{xxb}{2aa} + \frac{x^4b}{8a^4} - \frac{3x^6b}{48a^6}$, &c. igitur $\dot{x}\sqrt{bb - \frac{bbxx}{aa}} = b\dot{x} - \frac{xxb\dot{x}}{2aa} + \frac{x^4b\dot{x}}{8a^4} - \frac{3x^6b\dot{x}}{48a^6}$, &c. cujus Fluxionis quantitatis fluens est $= bx - \frac{bx^3}{6aa} + \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{3x^7}{336a^6} = \frac{x^7}{112a^6}$ &c. Quodsi loco abscissæ ponis axin a, habebis spatium tota ellipsi contentum, $ba - \frac{ba}{6} + \frac{ba}{40} - \frac{ba}{112}$ &c. Eodem modo spatium hoc ellipticum per diametrum quamvis ejusq; conjugatam invenitur; ergo

Prop. 56. Spatium ellipticum est ad parallelogrammon quodvis, cujus latera sunt diameter quævis ejusque conjugata, ut $ab - \frac{ab}{6} + \frac{ab}{40} - \frac{ab}{112}$, &c.

&c. ad ab, five ut $1-\frac{1}{6}+\frac{1}{40}-\frac{1}{112}$, &c. ad 1.

Coroll. 1. Omnia parallelogramma ellipsi circircumscripta, quorum latera sunt duæ diametri inter se conjugatæ, sunt inter se æqualia. (Fig. 82.) E. g. Parallelogrammon *PNMK*, cujus latera æqualia sunt duadus diametris conjugatis *AB* & *OD*, est æquale parallelogrammo *FGLE*, cujus latera æqualia sunt duabus aliis diametris inter se conjugatis *IT* & *HS*.

Coroll. 2. Eodem modo demonstratur, circulum esse ad quadratum diametri ut $aa-\frac{aa}{6}+\frac{aa}{40}-\frac{aa}{112}$, &c. ad aa. Ergo ellipticum spatium est ad circulum, cujus diameter æqualis est axi ellipsis, ut ab ad aa, sive ut b ad a; imo & pars spatii elliptici (Fig. 83.) *CDB* est ad partem circuli *EDB*, ut b ad a, hoc est, ut axis minor ad axem majorem ellipsis. *Coroll.* 3. Ex æquatione circuli constat DE esse $=\sqrt{ax-xx}$, & ex æquatione ellipsis itidem constat DC esse $=\sqrt{\frac{bbax-bbxx}{aa}}=$ $\sqrt{\frac{ax-xx\times bb}{aa}}=\frac{b}{a}\times\sqrt{ax-xx}$; ergo DE est ad DC, ut $\sqrt{ax-xx}$ ad $\frac{b}{a}\times\sqrt{ax-xx}$, sive ut $a\times$ $\sqrt{ax-xx}$ ad $b\times\sqrt{ax-xx}$, hoc est, ut a ad b. Sed triangula *HED* & *HCD*, quoniam eidem basi

basi $H\,D$ insistunt, sunt ad se invicem ut $E\,D$ ad $C\,A$, sive ut a ad b, hoc est, ut axis major ad axem minorem; ergo pars circuli $E\,H\,B$ est ad partem ellipsis $C\,H\,B$, ut axis major ad axem minorem,

§.96.(Fig.84.) Æquatio hyperbolæ intra asymptotos est $aa = ay + xy$, per *Coroll.* 2. *Prop.* 54. ubi a est latus $A\,B$ parallelogrammi $A\,B\,C\,D$, $B\,E = x$, & $E\,F = y$; ergo $y = \frac{a\,a}{a+x}$, & Fluxio spatii hyperbolici intra abscissam $B\,E$, ordinatas $E\,F$, $B\,C$, & hyperbolam $F\,C$ est $\frac{a\,a\,\dot{x}}{a+x}$. Dividatur $a\,a$ per $a+x$, quotiens erit $a - x + \frac{xx}{a} - \frac{x^3}{aa} + \frac{x^4}{a^3}$, &c.

Ergo $\frac{a\,a\,\dot{x}}{a+x} = a\dot{x} - x\dot{x} + \frac{x^2\dot{x}}{a} - \frac{x^3\dot{x}}{aa} + \frac{x^4\dot{x}}{a^3}$, &c. Cujus Fluxionis quantitas fluens est $= a\,x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} - \frac{x^4}{4aa} + \frac{x^5}{5a^3}$, &c. Ponatur $a = 1$; & erit spatium asymptoticum $= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$, &c. quæ ipsa series pro Logarithmis numerorum fuit inventa; ergo

Prop. 57. Spatia asymptotica respectu abscissarum $A\,B$, $A\,E$, &c. sunt ut Logarithmi respectu numerorum.

Coroll.

Coroll. Quoniam abſciſſæ *A B*, *A E*, ſunt in ratione reciproca ordinatarum, hoc eſt, ut *E F* ad *B C*; igitur ſpatia aſymptotica reſpectu ordinatarum ſunt etiam ut Logarithmi reſpectu numerorum, ita tamen, ut, cum ordinatæ in ratione Geometrica decreſcunt, ſpatia aſymptotica in ratione Arithmetica accreſcant.

De Cycloide.

§. 97, Si circulus *C D E* inſtar rotæ circumvolvitur ſuper linea recta *AB*, (Fig. 85.) ita ut punctum *C*, quod initio tangebat rectam *AB* in puncto *A*, circulo circumrotato, eandem rectam tangat in puncto *B*; idem punctum *C* deſcribet lineam curvam *A C B*, quæ Cyclois vocatur. Ex hac definitione cycloidis apparet, punctum *C* motu ferri compoſito ex rectilineo in directione lineæ *A B*, & circulari; apparet etiam rectam *AB* æqualem eſſe peripheriæ circuli generaticis *C E D*, & partem ejus aliquotam *A D* parti peripheriæ circuli aliquotæ, ſive arcui *C D*; item chordam *C D*, inter punctum *C* & punctum tactus *D* ad rectam *A B* interceptam, eſſe perpendicularem ad curvam & ad tangentem ejus *C E* in puncto *C*.

§. 98. *Prop.* 58. Biſecetur recta *A B*, quæ & baſis dicitur, in *M*, & ex puncto diviſionis *M* erigatur perpendicularis *M N* ad baſin *A B*, & ſuper hanc rectam *MN*, quæ vocatur axis, tanquam diametrum fiat circulus *M F N*; ducatur porro ex puncto curvæ *C* recta *C F O* parallela baſi *A* si AB, secans circulum NFM in F; ducatur deniq; chorda NF; dico arcum cycloidis NC duplum esse chordæ NF. Ducatur enim recta LH priori CO parallela & quam proxima, secans circulum in H, & inter puncta H & N chorda HN; producatur chorda NF donec rectæ LH occurrat in K; & patet cycloidis incrementum LC evanescens concipi posse tanquam lineolam rectam parallelam lineolæ KF, & arcum FH tanquam partem rectæ tangentis pFH. Ducantur ex punctis F & N tangentes Hp & Np; hæ ipsæ erunt inter se æquales per *Prop.* 16. *Coroll.* & triangula pFN & HKF similia; igitur lineæ HK & HF inter se æquales. Ducatur ex puncto H recta HI perpendicularis ad KF; hæc ipsa bisecabit illam in I, per *Coroll.* 2. *Prop.* 11. Fiat NG æqualis NF, & erit HG æqualis IF, quia IN & HN propter angulum INH evanescentem cöincidunt, hoc est incrementum momentaneum chordæ NF est dimidium lineæ FK, quæ est equalis incremento arcus cycloidis CL. Eadem demonstratio de omnibus incrementis ejusdem arcus valet. Ergo arcus cycloidis NC duplum est chordæ NF.

Coroll. Ex modo dictis patet, chordam FN esse chordæ CE, quæ cycloidem tangit in E, parallelam & æqualem.

De Spirali Æquiangula.

§.99 Si linea AB (Fig. 86.) circa punctum immobile circumagitur velocitate æquali, & puctum B eodem tempore versus B movetur velocitate inæ-

quali

quali & decreſcente in ratione decreſcentium radiorum BA, BC, BD, &c. continua; curva, quam punctum motu hoc compoſito ex circulari & rectilineo deſcribit, Spiralis vocatur æquiangula, eo quod radios BA, BC, BD, &c. in æqualibus angulis ſecat. Fiant enim anguli ABa, & CBc æquales, & ex ipſa generatione curvæ apparet, BA eſſe ad Ba, ut BC ad Bc; igitur triangula BAa & BCc ſunt inter ſe ſimilia; quare angulus BaA æqualis eſt angulo BcC, &c.

§. 100. *Prop.* 59. Arcus circuli, qui ex centro B radio quovis AB deſcribitur, ſunt menſuræ rationum, quas habent radii ſpiralis æquiangulæ inter ſe. Dividatur enim arcus AF in partes æquales; & erunt per defintionem curvæ radii BA, Ba, Bb, &c. in continua ratione, h. e. rationes BA ad Ba, Ba ad Bb, Bb ad Bd, &c. omnes inter ſe æquales; ergo ratio BA ad Bb eſt duplicata rationis BA ad Ba, quam exponit arcus $A2$, duplex arcus $A1$; ratio BA ad Bd eſt triplicata rationis BA ad Ba, quam exponit arcus $A3$, triplex arcus $A1$. Ergo arcus $A1$, $A2$, $A3$, &c. exponunt rationes, quas habent radii Ba, Bb, Bd, &c. ad radium BA; quamobrem arcus hi ſunt reſpectu radiorum, ut Logarithmi reſpectu numerorum.

De Trigonometria Plana,

§. 101. TRIGONOMETRIA plana est ea pars Geometriæ, quæ naturam triangulorum rectilineorum exponit, sive eorum latera & angulos determinare docet. Usus autem ejus per omnem Philosophiam Mathematicam extenditur: ejus enim ope corporum magnitudines & distantiæ determinantur.

§. 102. Sint *AC*, *DC*, (Fig. 87.) duo radii circuli *A G a*, & ducatur ex puncto *D* perpendicularis *D E* ad radium *A C*; hæc ipsa *D E* dicitur sinus rectus arcus *A D*, sive anguli *A C D*, inter duos radios *A C* & *D C* contenti, nec non sinus rectus arcus *D G a*, aut anguli *D C a*, quæ sunt complementa arcus *A D*, aut anguli *A C D*, ad 180 gradus. *A E* pars radii *A C*, quæ inter sinum rectum *D E* & peripheriam circuli continetur, eorundem arcuum & angulorum sinus versus vocatur. Altera pars *E C* ejusdem radii, Cosinus sive sinus complementi arcus *A D*, sive anguli *A C D*, nominatur; quia est sinus rectus arcus *DG*, seu anguli *D C G*, qui prioribus sunt contigui aut eorundem complementa ad 90 gradus.

Sinus recti arcuum sive angulorum sunt semper accrescentes, usque ad nonagesimum gradum, cujus sinus rectus æquatur radio circuli *G C*; ultra vero nonagesimum gradum sunt denuo decrescentes. Quare radius circuli, sive sinus rectus

Fig. 77.

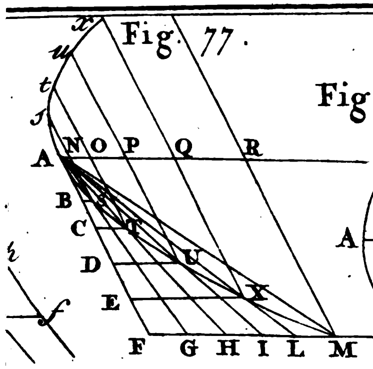


Fig: 78.

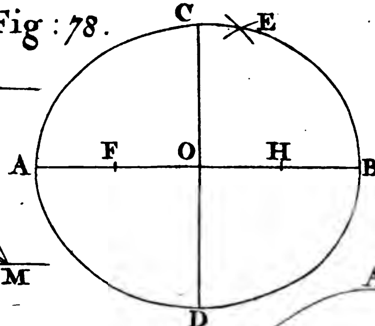


Fig: 80.

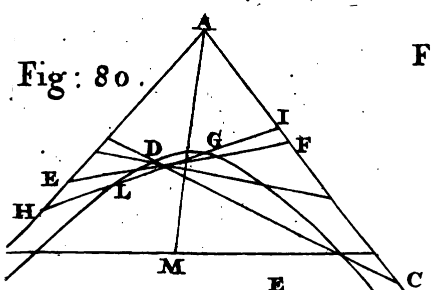


Fig: 81.

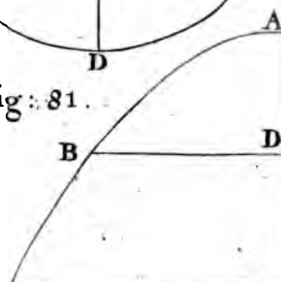


Fig: 83

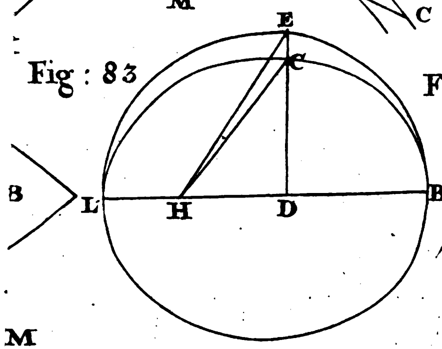


Fig: 84.

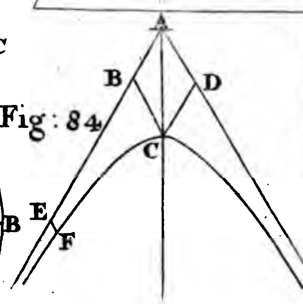


Fig: 86.

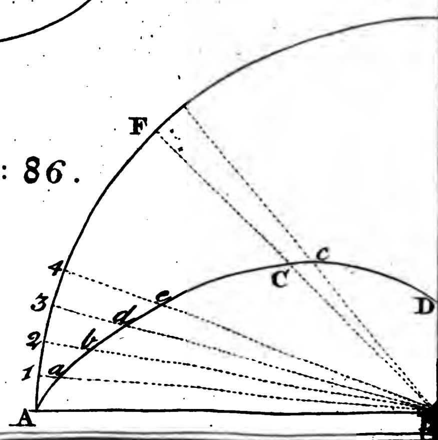
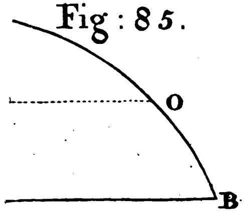


Fig: 85.



tus
rel

H
pu
pu
D
ad
A
pu
ha
gu
de

in
m
co
ali
tat
a
&
+
=
+
ti
n
q

tus nonaginta graduum, ſinus totus vocatur: nam reliqui ſinus recti hujusce partes ſunt.

§. 103. Ducatur ex puncto *A* perpendicularis *A H* in radium *AC*, contingens circuli peripheriam in puncto *A*, & occurrens radio *D C* prolongato in puncto *H*; hæc ipſa *A H* dicitur Tangens arcus *A D* aut anguli *A C D*, eorumq; complementorum ad 180 gradus, & recta *H C* eorundem Secans. Agatur denique recta *I G*, tangens circulum in puncto *G*, & occurrens ſecanti *C H* in puncto *I*; hæc ipſa *G I* dicitur Cotangens arcus *A D* aut anguli *D C G*, qui prioribus ſunt contigui & eorundem complementa ad 90 gradus.

§. 104. *Lemma.* Quodſi valor quantitatis alicujus incognitæ ſeu mutabilis y per infinitam ſeriem terminorum potentias alius quantitatis incognitæ x continentium exprimitur; valor quantitatis x per aliam ejuſmodi ſeriem infinitam potentias quantitatis y comprehendentem exprimi poteſt. Sit $y = ax + bx^2 + cx^3$, &c. Ponatur $x = by + iy^2 + ky^3$, &c. Et erit per §. 78. Arithm. $x^2 = b^2y^2 + 2biy^3 + i^2y^4 + 2bky^4$, &c. $x^3 = b^3y^3 + 3b^2iy^4$, &c. $x^4 = b^4y^4$, &c. Subſtituantur in æquatione $-y + ax + bx^2 + cx^3$, &c. $= 0$, valores potentiarum quantitatis x modo inventi, & ordine ponantur omnes termini, ita ut indices quantitatis y iidem in una eademque columna exiſtant, & erit

$$
\begin{array}{llllll}
-y = & -1y & & & & \\
+ax = & +ahy & +aiy^2 & +aky^3 & +aly^4, & \text{\&c.} \\
+bx^2 = & & +bh^2y^2 & +bbhiy^3 & +bi^2y^4 & \\
 & & & & +2bhky^4 & \\
+cx^3 = & & & +ch^3y^3 & +3ch^2iy^4 & \\
+dx^4 = & & & & +dh^4y^4 &
\end{array}
$$

Fiant ex ſingulis columnis æquationes, omniſſis potentiis quantitatis y, & inde valores quantitatum h, i, k, &c. eruantur hoc modo:

$$ah - 1 = 0 \qquad ai + bh^2 = 0 \qquad ak + 2bhi + ch^3 = 0$$

$$h = \frac{1}{a} \qquad i = \frac{-bh^2}{a} \qquad k = \frac{-2bhi - ch^3}{a}$$

$$i = \frac{-b}{a^3} \qquad k = \frac{+2bb - ac}{a^5}$$

$$al + bi^2 + 2bhk + 3ch^3i + dh^4 = 0$$

$$al = -bi^2 - 2bhk - 3ch^2i - dh^4$$

$$l = \frac{-b^3}{a^7} - \frac{4b^3}{a^7} + \frac{2bac}{a^7} + \frac{3cb}{a^6} - \frac{d}{a^5}$$

$$l = \frac{-5b^3 + 5abc - aad}{a^7}, \text{ \&c.}$$

Subſtituantur in æquatione $x = hy + iy^2 + ky^3 + ly^4$, &c. valores quantitatum h, i, k, l, &c. modo inventi, & formula talis prodibit: $x = \frac{y}{a}$

$$-\frac{by^2}{a^3} + \frac{2bb - ac}{a^5}y^3 + \frac{5abc - 5b^3 - aad}{a^7}y^4 \text{ \&c.}$$

Pona-

Ponatur $\frac{1}{a} = A$, $-\frac{b}{a^3} = B$, $+\frac{2bb - ac}{a^5} = C$, &c.

& eadem formula talis evadet; $x = \frac{y}{a} - \frac{bAA}{a}y^2 - \frac{2bAB - cA^3}{a}y^3$, &c. In hacce formula ingeniosissimus *de Moivre* detexit 1) denominatores omnes terminorum esse a, 2) summam omnium numerorum localium, qui literis initialibus A, B, &c. continentur, in unoquoque coöefficiente æquari exponenti potentiæ quantitatis y termini illius. Numerum localem illum voco, qui locum indicat, quem litera initialis quævis in Alphabetho tenet. Sic literæ A numerus localis est 1, literæ B, 2, C, 3, &c. Ut in coëfficientibus $2bAB$ & $c\,A^3$ sive $c\,A\,A\,A$ potentiæ y^3 summa numerorum localium AB est $1+2=3$, & summa numerorum localium $A\,A\,A$ est itidem 3, qui est index potentiæ y^3. Quare ad construendum formulæ terminum quemvis sequentem, totidem literæ initiales præcedentes semper combinendæ sunt, ut numeri locales earundem æquentur indici potentiæ quantitatis y illius termini. Sic in termino sequenti formulæ literæ initiales coefficientium erunt $B\,B$, $A\,C$, $A\,A\,B$ & A^4.

3) Numeri locales literarum minuscularum a, b, c, &c. initialibus præfixarum indicant, quot literæ initiales insequuntur. Sic numerus localis 3 literæ c in coëfficiente $c\,A^3$ indicat, tres initiales AAA sequi, &c..

 3) Cha-

4) Characteres numerici literis minusculis præmissi indicant, quot modis literæ initiales collocari possunt. Ita in coëfficiente $2bAB$ numerus 2 indicat, initiales AB duobus modis locari posse, nempe AB & BA. Hisce observatis terminus formulæ proxime sequens talis construitur:

$$\frac{-bBB-2bAC-3cAAB-dA^4}{a}y^4 = D$$

& hunc insequens $\dfrac{-3cBBA-2bBC}{a}$

$$\frac{-4dA^3B-3cA^2C-2AD-eA^5}{a}y^5$$

$= E$, &c.

Quodsi exponentes potentiarum quantitatis x in alia progressione arithmetica procedunt, quam in ordine numerorum naturali, omnes termini deficientes æque ac facta ex eisdem in terminis sequentibus sunt in formula omittenda. Ut, si y sit $= ax + cx^3 + ex^5$, &c, deficit b, d, &c. Ergo in formula $x = \dfrac{y}{a} - \dfrac{bAA}{a}y^2 - \dfrac{2bAB-cA^3}{a}y^3$ &c. termini B, D, &c. & facta est iisdem in terminis sequentibus sunt omittenda. Quare formula talis evadet:

$$x = \frac{y}{a} - \frac{cA^3}{a}y^3 \frac{-3cAAC-eA^5}{a}y^5$$

$$\frac{-gA^7-5eA\cdot C-3cA^2E-3cACC}{a}y^7, \text{\&c.}$$

§. 105.

§. 105. *Prop.* 60. *Problema.* Dato sinu recto *DE* (Fig. 88.) arcum ejus *AD* invenire?

Ducatur radius *Cd* radio *CA* quam proximus, & ex puncto *d* recta *de* sinui *DE* parallela, & concipiatur hæc ipsa una cum arcu *Ad* tanquam nascens, ita ut punctum *d* cum puncto *A* coincidat; erit *Ad*, fluxio arcus *AD*, hypothenusa trianguli *Ade*. Quodsi igitur sinus *DE* ponatur $= y$, & sinus versus $AE = x$; erit Fluxio *Ad*, arcus $AD = \sqrt{\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x}}$. Quæratur ex æquatione circuli $2rx - xx = yy$, in qua r designat radium circuli, valor posterioris partis Fluxionis $\dot{x}\dot{x}$, hoc modo:

$2rx - xx = yy$, hujusce æquationis Fluxio est

$$2r\dot{x} - 2x\dot{x} = 2y\dot{y}, \text{ ergo}$$

$$\dot{x} = \frac{2y\dot{y}}{2r - 2x} = \frac{y\dot{y}}{r - x}$$

$$\dot{x}\dot{x} = \frac{y^2\dot{y}^2}{rr - 2rx + xx} = \frac{y^2\dot{y}^2}{rr - yy}.$$

Igitur $\sqrt{\dot{y}\dot{y} + \dot{x}\dot{x}} = \sqrt{\dot{y}\dot{y} + \frac{y^2\dot{y}^2}{rr - yy}}$, hoc est

$$\frac{\sqrt{\dot{y}\dot{y}\,rr - \dot{y}\dot{y}\,y^2 + yy\,\dot{y}^2}}{\sqrt{rr - yy}} = \frac{\sqrt{\dot{y}\dot{y}\,rr}}{\sqrt{rr - yy}} = \frac{\dot{y}\,r}{\sqrt{rr - yy}}.$$

Ut hujus Fluxionis quantitas fluens, sive arcus *AD*, habeatur, extrahenda est radix ex $\frac{1}{\sqrt{rr - yy}}$

$= \overline{rr-yy}^{\,-\frac{1}{2}}$ per formulam §.76, & 77. Arith. hoc modo: $P^{\frac{m}{n}} = rr^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} = A$. $\frac{m}{n} AQ = \frac{-1}{2}.\frac{1}{r}.\frac{-yy}{rr} = +\frac{yy}{2r^3} = B$. $\frac{m-n}{2n} B Q = -\frac{3}{4}.\frac{yy}{2r^3}.\frac{-yy}{rr} = +\frac{3y^4}{8r^5} = C$. $\frac{m-2n}{3n} C Q = -\frac{5}{6}.\frac{3y^4}{8r^5}.\frac{-yy}{rr} = +\frac{5y^6}{16r^7} = D$, &c.

Est ergo $\frac{1}{\sqrt{rr-yy}} = \frac{1}{r} + \frac{yy}{2r^3} + \frac{3y^4}{8r^5} + \frac{5y^6}{16r^7}$, &c. Multiplicetur hæc series per $r\dot{y}$, & habebitur $\frac{r\dot{y}}{\sqrt{rr-yy}} = \dot{y} + \frac{y^2\dot{y}}{2r^2} + \frac{3y^4\dot{y}}{8r^4} + \frac{5y^6\dot{y}}{16r^6}$, &c. & hujus Fluxionis quantitas fluens sive arcus $AD = y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6}$, &c. Ponatur primus terminus hujus seriei A, secundus B, tertius C; & formula talis evadet: $y + \frac{1\times1y^2}{2\times3r^2}A + \frac{3\times3y^2}{4\times5r^2}B + \frac{5\times5y^2}{6\times7r^2}C + \frac{7\times7y^2}{8\times9r^2}D + \frac{9\times9y^2}{10\times11r^2}E$, &c.

Coroll. Eodem modo dato sinu verso $AE = x$, & diametro circuli $= r$, invenitur Fluxio arcus $AD = \dot{u} = \frac{r\dot{x}}{2\sqrt{rx-xx}}$, & per hanc ipse arcus $AD = u = \sqrt{rx} \times \overline{1 + \frac{x}{6r} + \frac{3x^2}{40r^2} + \frac{5x^3}{112r^3}}$, &c.

§. 106.

§. 106. *Propositio* 61. *Problema.* Dato arcu invenire sinum ejus?

Sit arcus $u = y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6}$, &c. Ponatur $1 = a$, $\frac{1}{6r^2} = c$, $\frac{3}{40r^4} = e$, $\frac{5}{112r^6} = g$, &c. & erit $u = ay + cy^3 + ey^5 + gy^7$, &c. Et per ultimam formulam *Lemmatis* præc. $y = \frac{u}{a} - \frac{cA^3}{a}u^3 - \frac{3cAAC - eA^5}{a}u^5$ &c. hoc est, $y = \frac{u}{a} - \frac{cu^3}{a^4} + \frac{3c - e}{a^7}u^5$, &c. hoc est, si loco a, c, e, &c. valores eorum substituantur, $y = u - \frac{u^3}{6r^2} + \frac{u^5}{120r^4}$, &c. hoc est $u - \frac{u^3}{1.2.3.r^2} + \frac{u^5}{1.2.3.4.5.r^4} - \frac{u^7}{1.2.3.4.5.6.7.r^6}$, &c. hoc est, si primus terminus ponitur A, secundus B, &c. $u - \frac{u^2 A}{2.3r^2} + \frac{u^2 B}{4.5.r^2} - \frac{u^2 C}{6.7.r^2}$, &c. In qua serie u denotat arcum, & r radium circuli.

Coroll. 1. Eadem ratione ex dato arcu $AD = u = \sqrt{rx} \times 1 + \frac{x}{6r} + \frac{3x^2}{40r^2} + \frac{5x^3}{112r^3}$, &c. sive $r^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{r^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{6r} + \frac{3r^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{40r^2} + \frac{5r^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{112r^3}$, &c. invenitur $x^{\frac{1}{2}} = \frac{u}{\sqrt{r}} - \frac{u^3}{6r^2\sqrt{r}} + \frac{u^5}{120r^4\sqrt{r}}$, &c. ac sinus versus $= \frac{xu^2}{r} - \frac{u^4}{3r^3} + \frac{2u^6}{45r^5}$, &c. hoc est $\frac{u^2}{r} - \frac{4u^4}{3.4r^3} + \frac{4.4u^6}{3.4.5.6.r^5}$

—4.

$-\frac{4.\,4.\,4\,u^8}{3.4.5.6.7.8r^4}$; &c. hoc est, si primus terminus ponitur *A*, secundus *B*, tertius *C*, &c. $\frac{u^2}{r} - \frac{4u^2}{3.4r}$ $A + \frac{4u^2}{5.6r}B - \frac{4u^2}{7.8r}C$, &c. In qua serie *u* denotat arcum & *r* diametrum circuli.

Coroll. 2. Eodem modo tangens per arcum invenitur. Sit enim arcus $u = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$, &c. per *Prop.* 23. & erit tangens $x = u + \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15}$ $+ \frac{17u^7}{315} + \frac{62u^9}{2835}$, &c.

Scholium. Hujusmodi regulis sinus & tangentes arcuum inveniri possunt, in quotcunque partes radius circuli sive sinus totus etiam divisus concipiatur. In tabulis, quas jam constructas habemus, sinus totus in 10000000 partes divisus supponitur, & ejusmodi partibus Sinus, Tangentes & Secantes, sunt determinatæ. *V. g.* Cum sinus rectus unius gradus ponitur esse 174524, intelligendum est eum continere 174524 partes ejusmodi, qualium sinus totus habet 10000000. Sinibus, Tangentibus & Secantibus Logarithmi sunt adjuncti, ad calculum Trigonometricum faciliorem & breviorem reddendum.

§. 107. *Pro.* 62. In triangulo quocunq; rectilineo (Fig. 89.) latera sunt ad se invicem in eadem ratione ac anguli ipsis oppositi. Sit triangulum *A B D*. Circumscribatur ei circulus *A B D*, & ducatur

ducatur ex centro ejus *C* recta *C E* bisecans latus *B D* eidemque perpendicularis; & erit *B E* sive *E D* sinus rectus anguli *B C E*, qui est semissis anguli *B C D*, anguloque *B A D* æqualis. Eodem modo probatur, *B F* dimidium lateris *A B* esse sinum anguli oppositi *A D B*. Ergo *B E*, sinus anguli *BAD*, est ad *BF*, sinum anguli *ADB*, ut *B D* ad *A B*.

Coroll. 1. Est etiam latus *B D* ad angulum ipsi oppositum *A*, ut latus *A B* ad angulum huic oppositum *D*.

Coroll. 2. Per hocce Theorema duo Problemata in Trigonometria plana solvuntur, viz. 1) Datis duobus angulis, & uno latere alterutri angulo dato opposito, reliqua latera invenire. 2) Datis duobus lateribus, & uno angulo alterutri dato lateri opposito, reliquos angulos & tertium latus invenire. *V. g.* Dato latere *A B*, & angulis *B* & *D*, separatim sumtis, invenire latus *A D*? Solvitur hoc Problema sequenti analogia: Ut est sinus anguli *D* ad latus ipsi oppositum *A B*, ita sinus anguli *B*, ad latus ipsi oppositum *A D*.

§. 168. *Prop.* 63. *Problema.* In triangulo quocunque rectangulo *A B C*, (Fig. 90.) datis angulis & uno latere *A B*, reliqua latera invenire?

Describatur radio *A B* arcus *AD*; & erit *AB* sinus totus, *A C* tangens anguli *A B C*, & *C B* secans ejusdem anguli. Igitur latera *A C* & *AB* analogiis sequentibus inveniuntur: Ut est sinus totus ad tangentem anguli *A B C*, ita *AB* ad *AC*; & ut est sinus totus ad secantem anguli *A B D*, ita *A B* ad *B C*.

Coroll.

Coroll. Datis lateribus *A B* & *A C*, hypothenusa *B C* ita invenitur: Ut est *A B* ad *A C*, ita sinus totus ad tangentem anguli *A B C*. Igitur ex tabulis tangentium ipse angulus *A B C*, & per *Prop.* hanc hypothenusa *B C*, invenitur.

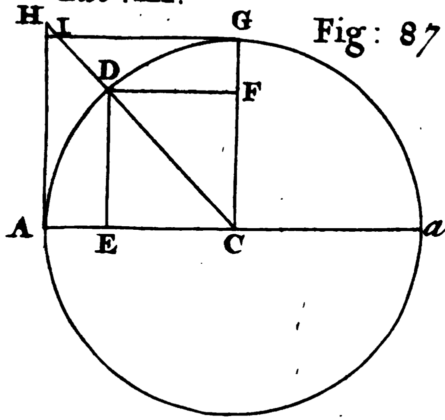
§. 109. *Prop.* 64. In triangulo quovis rectilineo summa duorum laterum *AC* (Fig. 91.) & *AB* est ad eorundem differentiam *A C* — *A B*, ut tangens dimidii summæ duorum angulorum *A C B*, & *A B C*, lateribus *A C* & *A B* adjacentium, ad tangentem semissis differentiæ eorundem.

Fiant enim *A C*, *A D*, *A E*, æquales, & ducatur ex *D* per *C* recta *D C F*. Jungantur *C* & *E* recta *E C*, & ducatur ex *B* recta *B F* rectæ *E C* parallela; & erit punctum *C* in peripheria circuli radio *A C* descripti, per consequens anguli *D C E* & *D F B* anguli recti, per *Coroll.* 3. *Prop.* 12 & *Prop.* 4. Si *B F* ponitur sinus totus, erit *C F* tangens anguli *C B F*, & *D F* tangens anguli *D B F*, aut ei æqualis *D E C*. Sed est angulus *D EC*, aut ei æqualis *DBF*, dimidium anguli *D AC*, per *Prop.* 12. & angulus *D A C* æquatur summæ angulorum *A C B* & *A B C*, per *Prop.* 10. Igitur angulus *D B F* est dimidium summæ angulorum *A C B* & *A B C*, & angulus *C B F* dimidium differentiæ eorundem. Et propter triangula *D E C* & *D B F* similia, erit *D B*, summa laterum *A B* & *A C*, ad *E B*, eorundem differentiam, ut *D F*, tangens anguli *D B F*, qui æquatur dimidio summæ angulorum *A C B* & *A B C*, ad *C F*, tangentem anguli *C B F*, qui æquatur dimidio differentiæ eorundem angulorum.

Coroll.

Tab. IX.

Fig: 87.



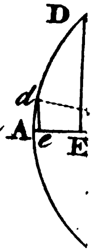
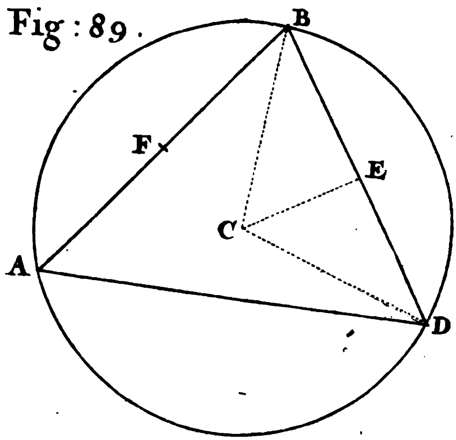


Fig: 89.



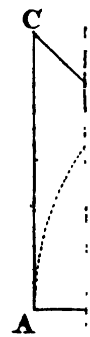
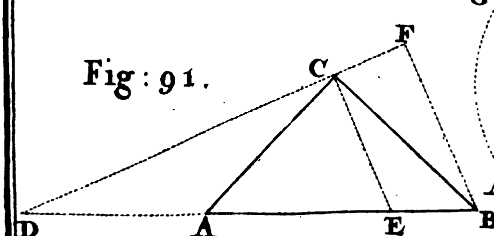
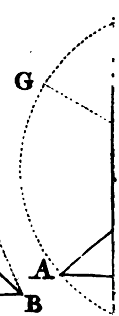


Fig: 91.





Coroll. Per hocce Theorema ſequens Problema ſolvitur. Datis duobus lateribus trianguli rectilinei *A C* & *A B*, & angulo *C A B*, qui lateribus datis includitur, angulos *A C B* & *A B C*, nec non tertium latus *C B* invenire? Dato angulo *C A B*, datur ſumma angulorum *A CB* & *A B C*, per *Cor.* 4. *Prop.* 9. Quæratur igitur dimidium differentiæ eorundem angulorum hacce analogia: ut eſt ſumma laterum *A C* & *A B* ad eorundem differentiam; ita tangens dimidii ſummæ angulorum *A CB* & *A B C* ad tangentem dimidii differentiæ eorundem. Addatur hocce dimidium differentiæ inventum dimidio ſummæ angulorum, & habebitur angulus major *A C B*. Subtrahatur etiam dimidium illud differentiæ a dimidio ſummæ, & habebitur angulus minor *A B C*. Angulis vero omnibus cognitis, invenitur latus *C B*, per *Cor.* 2. *Prop.* 62.

§. 110. *Prop.* 65. *Prob.* In triangulo quovis rectilineo *A B C* (Fig. 92.) datis omnibus lateribus ipſos angulos invenire? Deſcribatur latere *A B* ex centro *B* arcus circuli *G A D E*; & erit, per *Prop.* 15. *A C* ad *G C*, ut *E C*, quæ eſt differentia laterum *B C* & *A B*, ad *D C*. Data *D C* datur & *A D* ejuſque dimidium *A F*. Igitur in triangulo rectangulo *A B F*, datis *A B* & *A F*, datur & angulus *A B F*, per *Cor.* 2. *Prop.* 62. & complementum ejus ad 90. gradus angulus *BAF*. Dato angulo *BAF*, & lateribus in triangulo *ABC*, reliqui anguli *A B C* & *A C B* inveniuntur per idem *Coroll.*

Philosophiæ Mathematicæ

NEWTONIANÆ

ILLUSTRATÆ

TOMUS SECUNDUS,

Continens 1) Definitiones & leges motus generaliores; 2) Leges virium centripetarum, & theoriam attractionis seu gravitationis corporum in se mutuo; 3) Mundi Systema.

Philoſophiæ Mathematicæ
NEWTONIANÆ
ILLUSTRATÆ
TOMUS II.

INTRODUCTIO.

POSITIS in priori Tomo ſtructuræ noſtræ fundamentis exponendo principia Matheſeos, quibus Philoſophia NEWTONIANA innititur, ad inſtitutum noſtrum propius accedimus, ipſamq; Philoſophiam explicandam & captui tironum magis accommodandam ſuſcipimus: quod quidem tanta brevitate & perſpicuitate præſtare conabimur, ut nec prolixus in rebus per ſe claris ſermo lectori tædium, nec in obſcurioribus nimis conciſus multum negotii & laboris faceſſat. Neq; vero pro hoc inſtituto noſtro neceſſum eſſe putavimus in totum hujus Philoſophiæ volumen commentari, ſed potius ea ipſa capita, quæ ipſe Autor eximius præceptorum ſuorum cultoribus tanquam præcipua ſedulo legenda & ruminanda commendavit, hoc opere illuſtrare ſatius exiſtimavimus; non ut lectorem cæterorum Auctoris inventorum uſu fructu privemus, ſed ut ſatis eum inſtructum ad eadem perluſtranda reddamus, ſtudio ſuo talia ſi placet relinquentes.

Præmiſſis igitur Autoris definitionibus, in hocce Tomo leges motus generaliores explicabimus. Deinde virium centripetarum leges earumq; in motibus corporum effectus, & ipſam gravitatis corporum in ſeinvicem theoriam, conſpicua reddemus. Deniq; ex hac theoria mundi ſyſtema, corporumq; cœleſtium motus, vires & moles, ab autore tradita & demonſtrata illuſtrabimus, ita ut lectori attento detecta & perſpicua omnia pateant. Pleniorem lunæ theoriam, quæ vagum hoc aſtrum frenis numerorum compeſcat, & Planetarum calculum, nec non lucis & colorum, ſonorum & fluidorum, phænomena explicanda in aliud tempus reſervamus.

Methodus quâ Autor celeberrimus in rerum naturalium phænomenis explicandis uſus eſt, ut *Roger. Cotes* in præfatione ſecundæ editionis bene annotavit, eſt partim analytica partim ſynthetica, Naturæ vires legeſque virium ſimpliciores ex ſelectis quibuſdam phænomenis per analyſin deduxit,

duxit, ex quibus deinde per synthesin reliquorum constitutionem tradidit. Hac methodo mundani systematis explicationem è gravitatis theoria felicissime deduxit. Nam cum omnibus corporibus prope terram hærentibus virtutem gravitatis inesse experimenta comprobent, ipse primus ex lunæ motu circa terram vim ejus gravitandi in terram demonstravit. Eadem ratione ex motu primariorum planetarum circa solem vires eorum in solare corpus gravitandi deduxit; & vice versa ex viribus, quibus planetæ secundarii partim in solem, partim in primarios suos gravitant, leges quibus ipsi moventur optime detexit, & in primis lunæ theoriam omni exceptione majorem concinnavit, qua calculus lunæ observationibus Astronomorum exactissimis multo propius quam unquam antea accedit, & omnium inæqualitatum leges ab Astronimis ingenti labore observatas a priori cognoscuntur. Hæc philosophandi methodus omnium præstantissima ex regulis Autoris libro tertio præmissis apparet, quæ sequentes sunt:

1. Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & veræ sint & earum phænomenis explicandis sufficiant; natura enim unanimi philosophorum consensu nihil agit frustra, & frustra fit per plura, quod fieri potest per pauciora. Natura enim simplex est, & rerum causis superfluis non luxuriat.

2. Ideoq; effectuum naturalium ejusdem generis easdem assignandas esse causas, quatenus fieri potest; uti respirationis in homine & in be-

ſtia ; deſcenſus lapidum in Europa & in America ; lucis in igne culinari & in ſole ; reflexionis lucis in terra & in planetis.

3. Qualitates corporum, quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt, in quibus experimenta inſtituere licet, pro qualitatibus corporum univerſorum habendas eſſe. Tales ſunt corporum extenſio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ, quas omnibus corporibus, quæ nobis occurrunt, ineſſe experimentis convincimur, ideoq; & cæteris corporibus eaſdem qualitates competere concludimus. Quidni vim gravitatis, quam non ſolum corporibus, quæ manibus noſtris palpamus, ſed & corporibus cœleſtibus, ſpatiis immenſis a nobis diſtantibus, per motus eorum cognoſcimus, omnibus cæteris communem eſſe fortiori argumento ſtatuamus ? Materiæ partes quam minimas & hactenus indiviſas ratione dirimi poſſe ex matheſi certum eſt ; utrum vero per vires naturæ dividi poſſint eouſque incertum eſt, donec ars omnium magiſtra eaſdem fregerit aut diſſolverit.

4. In Philoſophia experimentali propoſitiones ex phænomenis per inductionem collectas, non obſtantibus contrariis hypotheſibus, pro veris, aut accurate, aut quam proxime, haberi debere, donec alia occurrerint phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur, aut exceptionibus obnoxiæ.

PARS

PARS I.

CONTINENS

Definitiones & leges motus generaliores.

Definitiones.

TEMPUS, ſpatium, locus & motus ſunt voces omnibus notiſſimæ, ſed in ipſis vocum conceptibus vulgus a Mathematicis admodum differt; quare autor ad præjudicia tollenda eos in Mathematicos & vulgares dividit, quorum illi ſunt veri & abſoluti, hi apparentes & relativi.

1. Tempus abſolutum, verum & mathematicum eſt æterna & æquabilis duratio, partibus ſive momentis ordine immutabili ſibi invicem ſuccedentibus conſtans; quo ſenſu tempus nullam ad res externas, aut earum motus, relationem habet, & ſine illis æquabiliter ſemper fluit. Tempus relativum, apparens & vulgare eſt ſenſibilis

& externa quævis duratio, per motum, aut alio modo, mensa.

2. Spatium absolutum, verum & mathematicum est penetrabilis, indiscerpibilis, immobilis, sibi invicem similis & infinita extensio. Spatium relativum, apparens & vulgare est sensibilis, per situm corporum ad se invicem definita extensio, quamobrem spatii absoluti mensura quælibet mobilis.

3. Locus absolutus est pars spatii absoluti, quam corpus occupat. Locus relativus est pars spatii relativi, quam corpus occupat. Ille est immotus, hic immobilis.

Igitur differentia notionum vulgarium a mathematicis de tempore, spatio & loco in eo consistit, quod vulgus eas a rebus corporeis, eorumq; motu & situ, prorsus dependere putat, & sine eis formari posse negat; quare quantitates harum rerum nonnisi per corporum motus, situs & relationes inter se metiuntur. Mathematici tempus, spatium & locum a rebus corporeis non dependere, sed ante mundum conditum cum divino ente ab æterno fuisse, & in æternum duraturum esse, sentiunt: quare quantitates eorum mensuris suis propriis & adæquatis, hoc est, tempus per tempus, spatium & locum per spatium & locum, metiuntur. Vulgi conceptus multis erroribus sunt obnoxii, quia motus corporum sæpissime æquales supponunt, quos mathesis inæquales esse deprehendit. Sic vulgus omnes dies naturales æquales esse putat, quia motum solis apparentem de meridiano discedentis, & in eundem meridianum revertentis, (qui motus diei

diei naturalis mensura est) omnibus anni temporibus æqualem supponit, quem tamen Astronomia inæqualem deprehendit. Sic vulgus terram nostram cum Atmosphæra sua spatium, seu locum unum eundemque, non solum magnitudine, sed & numero, in universo semper occupare opinatur, quia nullam situs respectu corporum in vicinia ejus constitutorum vicissitudinem observat; at vero tellurem circa solem circumactam locum suum in universo continuo mutare rectius Astronomia docet.

4. Motus absolutus est translatio corporis de loco absoluto in locum absolutum. Motus relativus est translatio corporis de loco relativo in locum relativum. Distinguuntur motus absoluti & veri a motibus relativis & apparentibus per proprietates suas, causas & effectus. Motus absoluti & veri proprietas est, quod omnes partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Sic mota navi omnia quæ in ea continentur una moventur, licet eandem semper ad navem positionem servent, & ab eo qui in cubiculo sedet tanquam quiescentia spectantur. Motus relativi proprietas est, quod corpora positiones suas inter se mutare videntur, quod fieri potest, si vel alterutrum duorum corporum moveatur, & alterum quiescat, vel si utrumque moveatur. Unde sæpius accidit, ut motum nostrum non observantes res extra nos quiescentes moveri putemus. Sic vulgus astra 24 horarum spatio circum terram volvi opinatur. Ad motum corporis absolutum determinandum non

Philoſophiæ Mathematicæ NEWTONIANÆ ILLUSTRATÆ

TOMUS II.

INTRODUCTIO.

POSITIS in priori Tomo ſtructuræ noſtræ fundamentis exponendo principia Matheſeos, quibus Philoſophia NEWTONIANA innititur, ad inſtitutum noſtrum propius accedimus, ipſamq; Philoſophiam explicandam & captui tironum magis accommodandam ſuſcipimus: quod quidem tanta brevitate & perſpicuitate præſtare conabimur, ut nec prolixus in rebus per ſe claris ſermo lectohæ particulæ magis aut minus constipantur: quare ad quantitatem materiæ computandam non solum magnitudinis spatii, quod occupat, sed & densitatis ejus, ratio est habenda. *V. g.* Sit spatium unum, alterius duplum, & densitas materiæ unius tripla densitatis alterius, erit quantitas materiæ unius sextupla alterius. Innotescit autem quantitas materiæ per corporis pondus, cui semper est proportionalis, si scilicet aëris resistentia deducitur.

6. Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate & quantitate materiæ conjunctim. Nam motus totius est summa motuum in partibus, & corporum æqualium motus est in ratione velocitatum; quare si unius corporis numerus particularum, quibus quantitas materiæ constat, est duplus alterius, & illud dupla velocitate hujus movetur, quantitas motus illius erit quadrupla hujus.

7. Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi, vel movendi uniformiter in directum. Hæc vis non differt ab inertia materiæ, & semper est proportionalis materiæ, quare & vis inertiæ dici potest. Exercet vero corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam, quod exercitium sub diverso respectu est vel resistentia, quatenus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; vel impetus, quatenus vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, cona-

tur

tur statum hujus mutare. Resistentia quiescentibus, impetus moventibus tribuitur.

8. Vis impressa est actio in corpus exercita ad mutandum ejus statum vel quiescendi, vel movendi uniformiter in directum. Hæc vis impressa non est concipienda tanquam vis aliqua in corpore inhærens, & corpus continuo protrudens, nam tali modo corpus non uniformi sed accelerato semper motu procederet; verum in actione sola consistens, post quam corpus in statu novo persevérat per solam vim inertiæ. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex ictu, ex pressione, ex vi centripeta.

9. Vis centripeta est, qua corpora versus punctum aliquod, tanquam centrum, undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt. Hujus generis est gravitas, qua corpora tendunt ad centrum terræ; vis magnetica, qua ferrum petit magnetem; & vis illa quæcunque sit, qua Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Pari ratione, ac lapis in funda circumactus a manu circumagente perpetuo retrahitur, & in orbe retinetur. Conatur enim lapis a manu recedere, eoque fortius, quo celerius revolvitur, & quam primum dimittitur, avolat. Sic globus plumbeus a montis cacumine secundum horizontalem lineam vi pulveris tormentarii projectus, & vi gravitatis ad centrum terræ retractus, in linea curva procedit, donec ad distantiam certam in terram decidat. Augendo velocitatem globi, augeri posset distantia pro lubitu, ita ut caderet ad distantiam

stantiam graduum decem, triginta, aut nonaginta; vel etiam, ut terram totam circumiret; vel denique, ut in cœlos abiret, & motu abeundi pergeret in infinitum. Eadem ratione luna vi gravitatis, aut alia quacunque, in terram urgetur, & in orbem suum flectitur. Hæc vis si justo minor esset, non satis flecteret lunam de cursu rectilineo; si justo major, plus satis flecteret, ac in terram eam deduceret. Mathematicorum est invenire vim, qua corpus in dato quovis orbe, data cum velocitate, accurate retineri possit: Et vicissim invenire viam curvilineam, in quam corpus e dato quovis loco, data cum velocitate, egressum, data vi, flectatur. Est autem vis centripetæ quantitas trium generum, absoluta, acceleratrix & motrix.

10. Vis centripetæ quantitas absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro efficacia causæ, eam propagantis a centro per regiones in circuitu. Ut vis magnetica pro mole magnetis, vel intensione virtutis, major in uno magnete, minor in alio.

11. Vis centripetæ quantitas acceleratrix est ipsius mensura velocitati proportionalis, quam dato tempore generat. Uti virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: Vel vis gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor in majoribus distantiis a globo terræ; in æqualibus autem distantiis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia,

magna

magna an parva) sublata aëris resistentia, æqualiter accelerat.

12. Vis centripetæ quantitas motrix est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat: Igitur materiæ quantitati & velocitati, sive vi acceleratici, conjunctim proportionalis. Quare in majori corpore major, in minori minor, & in eodem corpore major prope terram, minor in cœlis. Hæc quantitas est corporis totius propensio in centrum, (& ut ita dicam) pondus, & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, qua corporis descensus impediri potest.

Hasce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices & absolutas, & distinctionis gratia vim motricem referre ad corpus, tanquam conatum omnium ejus partium conjunctim ad centrum; vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam diffusam de centro per loca singula in circuitu, ad movenda corpora, quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad centrum tanquam causa aliqua præditum, sine qua vires acceleratrices & motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus aliquod centrale (quale est magnes in centro vis magneticæ, vel terra in centro vis gravitantis) sive alia aliqua, quæ non apparet. Mathematicus duntaxat hic est conceptus: Nam virium causas & sedes physicas autor non exponit.

Voces attractionis, impulsus, vel propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter & pro se mutuo promiscue usurpat, lectoremque sibi cavere monet, ne ipsummet vocibus istis causam aut ra-

tionem

tionem physicam actionis definire, vel centris, quæ sunt puncta mathematica, vires vere & physice tribuere putet, si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixerit.

At licet autor celeberrimus causam hujus vis non nominet, veruntamen ex iis, quæ de materiæ vi insita, seu vi inertiæ, dicta sunt, satis apparet, ejus sententia materiam ad motum & quietem esse indifferentem, eamque neque sese ipsam, neque alias res per semetipsam, movere posse, omnemque motum a spiritu primitus excitari; igitur & ipsam vim gravitatis aut attractionis neutiquam materiæ esse essentialem, sed potius spiritui omnes res materiales unienti, & universi hujus compagem legibus certis & statutis stabilienti, attribuendam. Idque eo certius concludimus, quia sub finem philosophiæ suæ naturalis loquitur de spiritu quodam subtilissimo, corpora crassa pervadente, & in iisdem latitante, cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas distantias sese mutuo attrahunt, & contiguæ factæ cohærent; & corpora electrica agunt ad distantias majores, tam repellendo, quam attrahendo corpuscula vicina; & lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & sensatio omnis excitatur, & membra animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus scilicet hujus spiritus per solida nervorum capillamenta ab externis sensuum organis ad cerebrum, & a cerebro in musculos, propagatis.

13. Vis centrifuga illa dicitur, qua corpora conantur a centro secedere. Hæc in corporibus

in

in circulo gyrantibus sinui verso arcus minimi est proportionalis. Gyretur corpus *A* (Fig. 1.) in circulo *A B C*, & trahatur tempore quam minimo, si motus rectilineus secundum tangentem *AE* cesset, ex *A* in *F*. Ducatur sinus *FB*, & erit *AF* sinus versus arcus *A B*; & corpus *A*, quod sola vi centripeta spatio *A F* propius ad centrum accederet, motu rectilineo superveniente in distantia *O B* distantiæ *O A* æquali retinetur. Igitur vis centrifuga sinui verso *A F* est proportionalis.

14. Vis elastica, sive elaterium, ea corporum qualitas est, qua partes ejus vi impressæ initio cedunt, sed vi cessante sese in priorem statum restituunt, & corpus obstans repellunt.

Leges motus.

Lex I. Corpus omne perseverat in statu suo quiescendi, vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare. Sic projectilia perseverant in motibus suis, nisi quatenus a resistentia aëris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quatenus ab aëre retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos curvilineos, in spatiis minus resistentibus factos, conservant diutius.

Lex II. Motus proportionalis est vi motrici impressæ, & fit secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur, sive corpus antea quiescat sive move-

moveatur. Si vis aliqua in corpus quiescens impressa motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit. Si vis impressa in corpus antea motum in eandem plagam dirigitur, motus posterior priori additur; si in contrariam, subducitur; si denique directio vis impressæ ad directionem motus prioris est obliqua, corpus in directione utrique intermedia procedit, motus prior aut augetur aut diminuitur, quatenus directio posterior cum priori magis conspirat aut ei est contraria.

Lex III. Actioni contraria semper & æqualis est reactio; sive corporum duorum actiones in se mutuo semper sunt æquales, & in partes contrarias diriguntur. Sic digitus lapidem premens ab eodem vicissim premitur, & equus lapidem funi alligatum trahens retrahitur æqualiter in lapidem: Nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius, quantum promovet progressum alterius. Sic corpus aliquod in corpus aliud impingens, quantum motus huic in eandem partem communicat, tantum ipsum in contrariam partem recipit.

Ex hisce legibus tanquam axiomatibus reliquas de virium compositione & resolutione, de vi gravitatis & collisione corporum & elaterio carentium & elasticorum, tanquam Corollaria deducuntur.

Lex IV. Corporis alicujus centrum viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore

pore describit, quo latera separatis. Si corporis centrum *A* vi sola *M*, (Fig. 2.) in loco *A* impressa ferretur æquali motu ab *A* ad *B*; & vi sola *N* in eodem loco impressa eodem tempore, motu itidem æquali, ferretur ab *A* ad *C*; viribus conjunctis feretur eodem tempore in diagonali ab *A* ad *D*. Concipiatur enim lineam *A B* in directione *A C* moveri motu parallelo, donec dato tempore perveniat in locum *C D*, & punctum *A* eodem tempore procedere in linea mota *A B*; evidens est, punctum *A* motu hoc composito ferri in directione *A D*, & pervenire in locum *D*, cum linea *A B* pervenerit in locum *C D*, sicut §. 17. Geom. hanc legem, secunda contentam, fusius explicavimus. Hinc sequitur,

Coroll. Ex viribus quibusvis obliquis *A B* & *B D*, vis directa *A D* componi, & vicissim quælibet vis directa *A D* in obliquas quascunque *AB* & *B D* resolvi potest. Quæ quidem compositio & resolutio abunde confirmatur ex mechanica. Ut si de rotæ alicujus centro *O* (Fig. 3.) exeuntes radii inæquales *O M*, *O N*, filis *M A*, *N P*, sustineant pondera *A* & *P* in æquilibrio; pondera corporum *A* & *P* erunt inter se reciproce, ut minimæ distantiæ filorum a centro *O*, hoc est pondus corporis *A*, erit ad pondus corporis *P*, ut *OL* ad *O K*, quod ita demonstratur. Centro *O*, & intervallo *O L* describatur arcus occurrens filo *MA* in *D*, & agatur ex centro eodem per *D* recta *O C*, & ex centro corporis *A* ad hanc perpendicularis *AC*; compleaturque rectangulum *ACDE*.

P Con-

Concipiantur fila *M A*, *N P*, sine omni gravitate, & corpora *A* & *P* idem valebunt si a punctis *D* & *L* suspendantur, quia gravitas corporis *A* sensibiliter una eademque est, sive sit in loco *A*, sive *D*, sive *M*. Nam distantia ponderis a centro terræ tanta est, ut differentiæ *M D*, *D A* evanescant. Exponatur ponderis *A* vis tota per lineam *A D*, & resolvatur hæc in vires *A C*, *C D*; & evidens est, vim *D C* trahendo radium *D O* directe a centro nihil valere ad rotam movendam; vim autem alteram *A C* vel *D E* trahendo radium perpendiculariter idem valere, ac si perpendiculariter traheret radium *O L* ipsi *O D* æqualem. Sunt ergo vires corporum *A*, *P*, ad movendam rotam inter se æquales, sed pondera eorum ut *A D* ad *D E*, hoc est, propter similitudinem triangulorum *A D C* & *D O K*, ut *D O* ad *K O*, sive ut *O L* ad *O K*.

Quodsi pondus *p* ponderi *P* æquale suspensum filo *N p* partim incumbat plano *p G*, ducatur per punctum *N* recta *H G* ad planum *p G*, deinde *p* recta *p Q* ad filum *p N*, & recta *p H* ad horizontem perpendicularis; & erit tensio fili *P N* ad tensionem fili *pN*, ut *H p* ad *p N*. Concipiatur enim corpus *p* duobus planis *p Q* & *p G* incumbere, eademque premere vi rectæ *p H* proportionali, hæc vis resolvi potest in vires *H N* & *N p*, quarum illa premit planum *p G*, hæc planum *p Q*. Removeatur planum *p Q*, & eadem vi tendetur filum *p N*. Est igitur vis tendens filum *N P* corporis *P* libere pendentis ad vim corporis

poris *p* plano *p G* incumbentis, quæ tendit filum *p N*, ut *H p* ad *p N*. Quare si corpora *p* & *A* sunt in æquilibrio, pendus corporis *A* est ad pondus corporis *p* in ratione composita ex ratione distantiarum minimarum centri *O* à filis reciproca, & ratione *H p* ad *p N* directa, hoc est, ut $O R \times H p$ ad $O K \times p N$.

Eadem ratione vires ad machinas quasvis eisq; applicata pondera, ipsarumque tendinum ad animalium ossa movenda, computantur, ut hujus rei specimen egregium Borellus in libro de motu animalium edidit.

Lex. V. Corpus pendulum *B* cadendo a quacunque altitudine *A* (Fig. 4.) in curva *A F G B* in infimo loco *B* acquirit eandem velocitatem, quam aliud corpus cadendo ab eadem altitudine perpendiculariter acquirit, cum pervenit in punctum *C* lineæ horizontalis *C B*; aut cum cadendo ab eadem altitudine *A* in plano chordæ *A D B* pervenit in punctum *B*. Exponatur velocitas, qua corpora libere cadentia moventur, (quæ in omnibus corporibus in eadem a terræ centro distantia est æqualis, per Definitionem 11.) per rectam *E D* rectæ *A C* parallelam, & ducatur ex puncto *A* perpendicularis ad chordam *A B* occurrens rectæ *E D* in *E*; & erit velocitas corporis perpendiculariter cadentis ad velocitatem corporis in plano *A B* cadentis, propter resistentiam plani, ut *ED* ad *AD*, per *Cor*. præc. sive propter similitudinem triangulorum *ADE* & *ACB*, ut *AB* ad *AC*. Supponantur duo corpora æquali velocitate ferri, unum ab *A* in *B*, & alterum ab *A* in *C*; erit tempus prioris ad tempus posterioris, ut *AB* ad *AC*. Cum autem velocitates corporum cadentium propter vim acceleratricem continuo eadem impellentem augeantur in ratione temporum; igitur incrementum velocitatis corporis cadentis in plano *A B* ab *A* in *B* erit ad incrementum velocitatis corporis perpendiculariter cadentis ab *A* in *C* in ratione composita, ex ratione velocitatis primæ *A C* corporis *B* ad velocitatem primam *A B* corporis *C*, & ratione temporum *A B* ad *A C*, hoc est in ratione $AC \times AB$ ad $AB \times AC$, quæ est ratio æqualitatis.

Ducantur chordæ *A F*, *FG*, *GB*, & ex punctis *F* & *G* rectæ *I F*, *K G*, cum recta *C B* parallelæ; & erit per jamjam demonstrata velocitas corporis cadentis in plano *A F G B*, cum pervenit in *F*, eadem quæ libere cadentis, cum pervenit in *I*; & per eandem rationem corpora ista duo à punctis *F* & *I* ejusdem altitudinis cum eadem velocitate cadentia acquirent eandem velocitatem, cum pervenerint in *G* & *K*, & abhinc in *B* & *C*. Concipiatur superficies concava *A F G B* tanquam compositum ex infinito numero planorum, & per eandem rationem constat, corpus cadens in superficie illa concava ab *A* in *B* acquirere eandem velocitatem, quam acquirit corpus libere cadens ab *A* in *C*. Removeatur superficies, & pendeat corpus *B* a filo *HB*, & erit res eadem: nam corpus cadens a filo tenso æque retardatur atq; a plano. Igitur corpus pendulum *B* cadens ab altitudine *A*, cum pervenit ad locum infimum *B*, acqui-

acquiret eandem velocitatem, quam corpus idem aut aliud cadendo ab eadem altitudine, aut perpendiculariter, aut in plano chordæ *AB*, cum pervenerit in punctum *C* aut *B*.

Lex VI. Commune gravitatis centrum corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se, non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quiescit, vel movetur uniformiter indirectum. (Fig. 5.) Moveantur corpora duo *A* & *B* motu uniformi in rectis *AO*, *BO*, ita ut velocitas corporis *A* sit ad velocitatem corporis *B*, in ratione data *Ad* ad *Be*. Sit centrum gravitatis *C* in recta jungente puncta *A* & *B*. Fiant *Ad*, *df*, *fh*, item *Be*, *eg*, *gi*, æquales, & jungantur rectis puncta *d* & *e*, *f* & *g*, *h* & *i*, dividanturq; hæ rectæ in ratione *AC* ad *CB* in punctis *c*, *c*, *c*; per hæc puncta centrum gravitatis corporum motorum perget; nam distantiæ corporum à centro gravitatis sunt semper inter se in ratione reciproca ipsorum corporum, hoc est, *A* est ad *B* ut *BC* ad *AC*, seu ut *ec* ad *cd*, seu ut *ge* ad *ef*, &c. Concipiantur spatia quæ corpora *A* & *B* describunt velocitate *Ad* & *Be* tanquam nascentia, & supponatur centrum gravitatis *C* moveri in directione rectæ *CK*, quoniam corpora eisdem semper legibus moveri pergunt, & centrum gravitatis in eadem directione movebitur, describetque rectam *CK* motu uniformi, sicut res evidens est, si corpora moveantur in lineis parallelis.

Si corpora in rectis super diversis planis, aut parallelis, aut ad se invicem inclinatis, progrediuntur; omnes rectæ, quæ à punctis unius lineæ ad puncta alterius ducuntur, sunt in eodem plano, & centrum gravitatis in hoc plano movetur motu uniformi in linea recta.

Si corpora in lineis parallelis moveantur in partes contrarias, & ratio velocitatum sit æqualis rationi distantiarum a centro gravitatis, hoc ipsum quiescet; si ratio velocitatum sit major, in partem velocioris; sin minor, in partem tardioris lento motu procedet.

Similiter commune centrum trium corporum vel quiescet, vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum, & centri corporis tertii, in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujusvis, vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium, & centrum quarti, in data ratione, & sic in infinitum.

Igitur in Systemate quocunq; corporum commune gravitatis centrum, sive corpora in se invicem agant, sive minus, (exclusis externis causis) vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum.

Lex

Lex. VII. Corporum dato ſpatio incluſorum iidem ſunt motus inter ſe, ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum ſine motu circulari. Sermo eſt de motu corporum relativo. Nam ſi corpora eadem velocitate qua ſpatium feruntur, inter ſe quieſcere videntur; ſi vi alia impreſſa unius motus acceleratur aut retardatur, hoc ipſum ab alio recedere aut ad illud accedere videtur, & ex colliſione eorum iidem effectus obſervantur, ac ſi cum ſpatio non moverentur, ſicut cuilibet navigantium hoc experiri licet.

Lex VIII. Si corpora moveantur quomodocunque inter ſe, & a viribus acceleratricibus æqualibus ſecundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter ſe, acſi viribus illis non eſſent agitata. V. g. Moveatur dato quovis tempore corpus *A* per ſpatium *A B*, (Fig. 61.) & eodem tempore percurrat corpus *C* ſpatium *C D*. Supponatur corpus *A*, vi acceleratrice urgente, eodem tempore decidiſſe in *E*, & fiat *D F* ipſi *B E* parallela & æqualis; & erit *F* locus corporis *C* eadem vi acceleratrice agitati. Jungantur puncta *B* & *D*, item *E* & *F* rectis; & erunt hæ lineæ inter ſe parallelæ & equales.

Lex IX. Quantitas motus, quæ colligitur capiendo ſummam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur actione corporum inter ſe. Etenim actio eiq; contraria reactio æquales ſunt per Legem 3, ideoq; per Legem 2. æquales in motibus efficiunt mutationes verſus contrarias partes. Ergo ſi motus fiant ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis, ſubducetur motui corporis inſequentis, ſic ut ſumma maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant; æqualis erit ſubductio de motu utriuſque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem. Ut ſi corpus ſphæricum *A* ſit triplo majus corpore ſphærico *B*, habeatque duas velocitatis partes, & *B* ſequatur in eadem recta cum velocitatis partibus decem, ideoq; motus corporis *A* ſit ad motum corporis *B*, in ratione compoſita ex rationibus quantitatum materiæ 3 ad 1, & velocitatum 2 ad 10, hoc eſt ut 6 ad 10, qui numeri partes motus æquales exprimunt, quarum corpori *A* ſunt ſex, & corpori *B* decem, earumq; ſumma facit ſedecim. In corporum igitur concurſu, ſi corpus *A* pro diverſa elaterii ratione lucretur partes motus tres vel quatuor, vel quinque, corpus *B* amittet partes totidem, ideoque perget corpus *A* poſt reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus ſeptem vel ſex vel quinque, exiſtente ſemper ſumma partium ſexdecim ut prius. Si corpus *A* omnes motus partes ſex corporis *B* lucretur, hoc ipſum corpus *B* quieſcet; ſin plures, ut ſeptem aut octo, corpus *B* regredietur parte motus una aut duabus. Atq; ita ſumma motuum conſpirantium 9 + 7, 10 + 6, 11 + 5, 16 + 0, & differentiæ contrariorum 17 — 1, 18 — 2, &c.

Semper

Semper erunt partium sexdecim ut ante collisionem. Ipsa vero volocitas corporum post collisionem, quia materiæ quantitas non mutatur, augetur vel diminuitur in ratione motuum. Sic corpus *A*, quod ante collisionem habebat motus partes sex & velocitatis duas, si post collisionem habeat motus partes 18; habebit velocitatis partes 6.

Quodsi corpora, vel non sphærica, vel diversis in rectis moventia, incidant in se mutuo oblique, & requirantur eorum motus post reflexionem; cognoscendus est situs facierum concurrentium, aut linearum in quibus moventur, ad se invicem: deinde corporis utriusq; motus per *Coroll. L.* 4. dividendus est in duos, ita ut eorum bini sint in eadem directione, & bini ad hanc directionem perpendiculares. Motus in eadem directione, quia sunt inter se paralleli retinendi sunt iidem post reflexionem atq; antea, & motibus ad hanc directionem perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt, sic ut summa conspirantium, & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. E. g. moveat corpus *A* (Fig. 7.) motus partibus sex in linea *AC*, & corpus *B* partibus decem in linea *BC*; bisecetur angulus *ACB* per rectam *LCD*, & ducantur ad eam perpendiculares *DB*, *AF*, *KCE*, compleanturq; rectangula *AFCG*, & *DCEB*; & erit motus *AC* divisus in motus *AF* & *CF*, & motus *BC* in motus *DB* & *DC*; sed motus *FC* & *DC*, quoniam sunt inter se paralleli, nullam a collisione

lisione corporum mutationem subeunt, omnisque mutatio post reflexionem est in motibus *A F* & *D B*. Supponatur corpus *A* recedere partibus motus 12, & reflectetur corpus *B* partibus 8, quorum motuum differentia est partium 4, ut ante collisionem. Nam propter triangula *A F C* & *B C D* similia, *A F* sive *G C* est ad *D B* sive *C E*, ut *A C* ad *C B*, sive ut 6 ad 10, quorum differentia est quatuor partium, quibus corpus *B* fortius premit corpus *A*, cum reliquæ sex partes utrinq; per actionem contrariam destruantur. Quodsi ergo propter elaterium corpus *A* duodecim partes motus in contrariam partem adipiscatur, corpus *B*, propter reactionem actioni æqualem, non solum 4 partes motus sui in eandem partem amittit, sed & octo in contrariam partem recipit. Fiat *C H* æqualis *C F*, & *C L* æqualis *C D*; fiat etiam *C K* partium 12, & *C N* octo talium, quales *G E* continet sedicem; compleanturque parallelogramma *C H I K* & *C L M N*; horum diagonales *C I* & *C M* determinabunt motus totos corporum *A* & *B* post reflexionem.

Hæc lex generalis legibus corporum elaterio destitutorum æque ac perfecte elasticorum a *Johanne Wallisio* & *Christiano Hugenio* inventis & demonstratis; imo & imperfecte elasticorum experimentis à *Christophero Wrenno* equite aurato institutis, comprobatur; quæ antequam cum Autore describamus, leges commemoratas cum *Cl. Whistonio* Autoris nostri interprete producere,

&

& methodo facillima demonstrare a proposito nostro non videtur alienum.

De motu Corporum elaterio carentium.

Lex X. Si corporum duorum inæqualium elaterio carentium alterum motum in quiescens alterum impingat; utraq; in eandem partem progredientur communi velocitate, quæ erit ad velocitatem corporis moti ante concursum, ut corpus motum ante congressum ad utrumque corpus simul sumtum. Sit corpus motum 4, & corpus quiescens 6 partium, illudq; moveatur velocitate duarum partium; erit quantitas motus ejus 8 partium. Cum ergo corpus motum impingit in corpus quiescens, hoc ipsum impellit, ut communi secum velocitate pergat, motusq; sui partem materiæ illius proportionalem communicat ad vim inertiæ ejus superandam, hoc est, de 8 illis partibus $4\frac{4}{5}$; ipsumq; propter reactionem actioni æqualem totidem partes motus amittit, ita ut ipsi remaneant $3\frac{1}{5}$. Summa ergo motuum utriusq; erit æqualis motui corporis ante congressum, nempe 8 partium. Sed materia mota post congressum est 10 partium; dividatur 8 per decem, quotiens $\frac{8}{10}$ sive $\frac{4}{5}$ erit velocitas post congressum, quæ est ad velocitatem ante congressum 2, ut corpus motum 4 ad summam corporum 10.

Coroll.

Coroll. Quare si corpora sint æqualia, velocitas eorum communis post concursum erit demidia velocitatis corporis moti ante concursum.

Lex XI. Si corpora duo inæqualia elaterio destituta ferantur inæquali velocitate in eandem partem, & corpus velocius motum impingat in illud quod tardius movetur; pergent ambo in eandem partem, & motus quantitas utriusq; simul sumta manebit eadem post concursum. Nam quantum motus corpus velocius tardiori communicat; tantum ipsum amittit. Ipsa ergo velocitas æqualis est summæ motuum applicatæ ad summam corporum. E. g. Sint corpora ut 2 ad 5, & velocitates eorum ut 3 ad 4; erit summa motuum 26, quæ divisa per summam corporum 7, quotiens $3\frac{5}{7}$ dabit communem velocitatem.

Coroll. Quare si corpora sint equalia, velocitas communis post concursum erit dimidium velocitatis utriusq; simul sumtæ ante concursum.

Lex XII. Si corpora duo inæqualia elaterio destituta sibi invicem directe obviam procedant velocitate inæquali; quantitas motus post occursum (quia per actionem & reactionem utrinq; æqualis motus quantitas destruitur) erit tantum motuum priorum differentia in ejus corporis partem, qui majorem habebat motum ante congressum; & velocitas communis erit æqualis huic differentiæ applicatæ ad summam corporum. Sit corpus *A* partium 2, & velocitas ejus 3; sit corpus *B* 7, & velocitas ejus 4; erit motus corporis *A* 6, & corporis *B* 28, quorum differentia est 22 partium,

partium, quibus utrumq; corpus movebitur post concursum in partem corporis *B*. Dividantur hæ partes 22 per 9 summam corporum, quotiens $2\frac{4}{9}$ erit velocitas eorum communis post concursum.

Coroll. Quare si duo ejusmodi corpora æqualia sibi obviam eant velocitate æquali; aut si velocitates eorum sint in ratione reciproca corporum; ambo post concursum quiescent: si vero corpora sint æqualia, & velocitates eorum inæquales, aut vice versa, post concursum procedent dimidio motuum æque ac velocitatum differentia.

Hæ leges non solum corporibus mollibus, sed & perfecte duris conveniunt, dummodo careant elaterio.

De motu Corporum perfecte elasticorum.

Lex XIII. Si corpus quodcunque perfecte elasticum velocitate quacunque motum in aliud corpus quodcunque perfecte elasticum, aut quiescens, aut priori tardius in eandem partem procedens, directe impingat; post collisionem summa motuum manebit eadem quæ prius. Nam quantum corpus velocius motus sui quiescenti aut tardius moto communicat, tantum ipsum amittit. Velocitas vero, quam corpus quiescens aut tardius motum acquirit, est ad velocitatem respectivam (quæ hic est velocitatum differentia) ut duplum corporis velocioris ad summam corporum. Sit corpus *A* 3, velocitas ejus 2; sit corpus *B* 2,

&

& velocitas ejus 7; & erit, ut summa corporum 5. ad duplum corporis *B*=4, sic velocitas respectiva 5 ad velocitatem 4, quam corpus *A* post collisionem acquirit, quæ addita velocitati ejus priori 2, summa 6 erit velocitas ejus post collisionem. Concipiantur enim corpora sine elaterio; & certum est per *L.* 10. velocitatem respectivam, quæ est excessus velocitatis corporis *B* in ipso concursu, quo corpora duo coalescunt, diminui in eadem ratione, qua corporis *B* moles augetur. Concipiatur jam inter utrumq; corpus positum elaterium, quod tenditur pro ratione motus corpori *A* impressi, qui velocitati est proportionalis; hoc elaterium, actione hac cessante, remissum, corpus utrumque in partes contrarias eadem vi dispellit, qua ipsum tendebatur; quare corpori *A* altera pars motus & velocitatis priori æqualis accedit, & erit velocitas tota, quam acquiret corpus *A*, dupla illius, quam acquireret, si corpora elaterio carerent. Si huic velocitati pars motus proportionalis 12 a motu corporis *B* = 14, subtrahitur, remanet motus corporis *B* post collisionem duarum partium, qui divisus per materiam corporis ejusdem 2 facit 1, quæ velocitas ejus est. Quare post collisionem duo hæc corpora eadem respectiva velocitate recedunt, qua ante concursum coibant. Quod in omnibus exemplis verum est.

Coroll. Si corpora sunt æqualia, velocitates post collisionem erunt invicem mutatæ; aut si corpus unum ante concursum quievit, post collisionem mo-

movebitur velocitate alterius, quod tunc quiescet.

Lex XIV. Si corpora duo perfecte elastica cujuscunque magnitudinis & velocitate quacunque sibi obviam moveantur; post collisionem differentia motuum & velocitas relativa (quæ hoc casu est velocitatum summa) sunt eadem, quæ ante congressum. Sit corpus *A* 2, & velocitas ejus 3; sit corpus *B* 5, & velocitas ejus 4; erit quantitas motus illius 6, & hujus 20, eorumque differentia 14. Quodsi corpora essent sine elaterio, æqualis utrinque motus quantitas per actionem & reactionem, hoc est, bis sex partium destruetur, & remanerent 14 partes, inter duo corpora distribuendæ pro ratione materiæ cujusque; acquiret ergo corpus *A* partes motus 4 in partem corporis *B*. Sed quoniam corpora sunt perefcte elastica, elaterium eorum tenditur vi motus bis sex partium in contrarium nitentium, & 4 partibus, quas corpus *A* acquirit, quæ partes omnes in unam summam collectæ faciunt 16; atque tanta vi elaterium ambo corpora ab utroque latere propellit; igitur hæ sedecim partes 4 partibus, quas corpus *A* acquisiverat, auctæ faciunt 20, a quibus 6 in contrarium tendentes subductæ relinquunt 14, quibus corpus *A* recedit. *E* contrario a 20 illis partibus 20 corporis *B* subductis, remanet 0. Ergo corpus *B* post collisionem quiescit. Est igitur motuum differentia & velocitas relativa eadem, quæ ante reflexionem.

Coroll.

Coroll. 1. Si corpora ſint æqualia; velocitatibus permutatis, poſt colliſionem diſcedent. Si velocitates ſint in ratione reciproca corporum; utrumque eadem, qua acceſſit, velocitate reſiliet.

Coroll. 2. Si duo corpora perfecte elaſtica eadem celeritate revertantur,qua colliſa reſilierunt; poſt alteram colliſionem eadem quodque celeritate feretur, qua ante primum congreſſum; quod quilibet, ſecundum leges præcedentes computatione facta, facile cognoſcet.

Coroll. 3. Si duo corpora perfecte elaſtica ſibi mutuo occurrant, facta ex ſingulorum magnitudinibus in velocitatum ſuarum quadrata ſimul ſumta ante & poſt concurſum corporum æqualia ſunt. Ut in priori exemplo factum ex magnitudine corporis *A* in quadratum velocitatis ejus ante congreſſum eſt 18; & factum ex magnitudine corporis *B* in quadratum velocitatis ſuæ eſt 80, quorum factorum ſumma eſt 98. Poſt congreſſum factum hoc corporis *B* eſt *o*, & factum ex magnitudine corporis *A* in quadratum velocitatis ſuæ eſt 7 × 7 × 2, hoc eſt 98.

Coroll. 4. Si quod corpus perfecte elaſticum majori vel minori quieſcenti occurrat; majorem ei celeritatem dabit per interpoſitum corpus mediæ magnitudinis; & quo plura corpora perfecte elaſtica inter iſta duo corpora interponentur, eo majorem motum & velocitatem corpus quieſcens acquiret: Maximus autem quieſcenti motus conferetur, ſi corpora interpoſita cum extremis ſint in continua proportione. Sic Hugenius calculo com-

comprobavit, quodſi corpora centum, in proportione continua dupla, ordine locata ſint, incipiatque motus a maximo; celeritatem minimi ad celeritatem maximi quam proxime fore, ut 14,760,000,000 ad 1. Sin motus ordiatur a minimo, motus quantitatem in univerſum auctum fore, ut 1 ad 4,677,000,000,000. Expoſitis legibus corporum omni elaterio carentium & perfecte elaſticorum, quorum nullum in rerum natura ſedulis ejus ſcrutatoribus apparuit, Wrennii methodum, qua in experimentis ſuis a Cl. Mariotto expoſitis ad leges motus, quas corpora imperfecte elaſtica poſt colliſionem obſervant, indagandas uſus eſt, breviter cum Autore deſcribere licet.

Pendeant corpora ſphærica *A*, *B* (Fig. 8.) filis parallelis & æqualibus *A C*, *B D* a centris *C*, *D*. His centris & intervallis deſcribantur ſemicirculi *E A F*, *G B H*, radiis *C A*, *B D*; biſecti. Trahatur corpus *A* ad arcus *E A F* punctum quodvis *R*, & (ſubducto corpore *B*) demittatur inde, redeatque poſt unam oſcillationem ad punctum *V*; eſt *R V* retardatio ex reſiſtentia aeris. Hujus *R V* fiat *S T* pars quarta ſita in medio, ita ut *R S* & *T V* æquentur, ſitque *R S* ad *S T* ut 3 ad 2. Et exhibebit *S T* retardationem in deſcenſu ab *S* ad *A* quam proxime. Nam licet corpus *A* cadendo ab *R* ad *A* majus ſpatium percurrat quam aſcendendo ab *A* verſus *F* & recadendo in *A*, & inæqualitas hæc major adhuc ſit cum corpus

A reascendit ab *A* in *V*, ideoque retardationes istæ quatuor sint inæquales; attamen inæqualitas hæc eo corrigitur, quod quarta pars retardationis totius oscillationis in medio arcus *R V* ponitur: nam ita punctum *S* in eadem fere altitudine est ad quam corpus *A* versus *F* ascendit cadendo ab *R*.

Restituatur corpus *B* in locum suum. Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A* sine errore sensibili tanta erit, acsi in vacuo cecidisset de loco *T*. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcus *T A*. Nam velocitatem penduli in puncto infimo esse ut chordam arcus, quem cadendo descripsit, patet per L. 5. Post reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s* & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*; a quo si corpus *A* demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum *r*, sit *s t* pars quarta ipsius *r u* sita in medio, ita videlicet ut *r s* & *t u* æquentur, & per chordam arcus *t A* exponatur velocitas, quam corpus *A* proxime post reflexionem habuit in loco *A*. Nam *t* erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus *A* sublata aëris resistentia, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* ascendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo.

Du-

Ducatur tandem corpus *A* in chordam arcus *T A*, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem; deinde in chordam arcus *t A*, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime post reflexionem. Sic corpus *B* ductum in chordam arcus *B l* dabit motum ejus proxime post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante, quam post reflexionem, & tum demum conferendi sunt motus inter se, & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam æqualibus quam inæqualibus, reperit Autor semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuo recte occurrebant, æquales fuisse mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatas, atq; ideo actionem & reactionem semper esse æquales. Ut si corpus *A* incidebat in corpus *B* quiescens cum novem partibus motus, & amissis septem partibus, pergebat post reflexionem cum duabus; corpus *B* resiliebat cum partibus istis septem, &c. Errorem digiti unius & alterius tribuit Autor partim difficultati simul demittendi pendula, sic ut in se mutuo impingerent in loco infimo *A B*, & notandi loca *S* & *R*, partim corporum densitati inæquali & texturæ diversæ.

Sic Autor corporum diversæ materiæ vim elasticam exploravit, per quam deinde reflexiones in aliis caſibus concurſuum determinavit, & reſponderunt experimenta. Nam in iiſdem corporibus in variis caſibus concurſuum veloci-tates reſpectivæ ante & poſt concurſum eandem ſemper inter ſe rationem obſervarunt, quæ ratio in pilis ex lana arcte conglomerata & fortiter conſtricta fuit, ut 5 ad 9 circiter, in vitreis, ut 15 ad 16 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe; aliæ ex ſubere cum paulo minore.

In attractionibus actionem æqualem eſſe reactioni, tentavit in magnete & ferro. Si in vaſculis propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita in aqua ſtagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, ſed æqualitate attractionis utrinque ſuſtinebunt conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcent.

PARS

PARS II.

AGENS

De viribus centripetis & Attractione ſive Gravitatione corporum in ſe invicem.

Lemma 1. QUANTITATES, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito conſtanter tendunt, in fine illius temporis, cum ipſæ evaneſcunt, fiunt æquales. Nam ſi tunc æquales non eſſent, poſtquam evanuerunt, & poſt tempus illud finitum, ad æqualitatem tendere pergerent, quod eſt abſurdum & contra hypotheſin. Eadem eſt ratio quantitatum accreſcentium & ad æqualitatem tempore quovis finito continuo accedentium. Nam in fine illius temporis differentia earum evanescit. Hinc sequitur

Lemma 2. Arcus ejusque sinus & tangens, item arcus ejusque chorda quia decrescendo ad æqualitatem propius semper accedunt, cum evanescunt aut nascuntur, sunt inter se æquales.

Lemma 3. Triangula similia *A D B*, *A E C*, (Fig. 9.) sunt inter se in ratione duplicata laterum *A D* & *A E*. Ducantur enim rectæ *BF*, *CG* ad *A E* perpendiculares, & erit triangulum *A D B* ad triangulum *A E C*, ut rectangulum *A D* × *F B* ad rectangulum *A E* × *C G*; sed propter similitudinem triangulorum *F D B* & *G E C*, item triangulorum *A D B* & *A E C*, *F B* est ad *D B*, ut *G C* ad *E C*; & *D B* est ad *E C*, ut *A D* ad *A E*. Ergo *F B* est ad *G C* ut *A D* ad *A E*; quare triangulum *A D B* est ad triangulum *A E C*, ut *A D* × *AD* ad *A E* × *A E*, hoc est in ratione duplicata laterum *A D* & *A E*.

Lemma 4. Si recta *A E* & curva *A B C* (Fig. 10.) positione datæ se mutuo secent in angulo dato *A*, & ad rectam illam ex punctis *B*, *C*, ducantur ordinatæ *B D*, *C E*; areæ curvilinæ *A D B* & *A E C* evanescentes, hoc est, cum puncta *B* & *C* coincidunt cum puncto *A* sunt inter se in ratione duplicata laterum *A D* & *A E*. Ducatur enim recta *A G* tangens curvam in *A*; hæc ipsa coincidet cum puncto *A*, eruntque *F A* & *B A*, item *G A* & *A C* evanescentes inter se æquales, per *Lemm.* 1. & areæ cur-

curvilineæ *ADB*, *AEC*, coincident cum areis rectilineis *ADF*, *AEG*, eruntq; ultimo in duplicata ratione laterum *AD*, *AE*, per *Lem.* 3.

Prop. I. Spatia quæ corpus urgente quacunque vi finita deſcribit, ſive vis illa determinata & immutabilis ſit, ſive eadem continuo augeatur, vel continuo diminuatur, ſunt ipſo motus initio in duplicata ratione temporum. Si vis eſt determinata & immutabilis, velocitas propter hanc vim, continuo in corpus motum agentem, in ipſa ratione temporum augetur. Quodſi igitur velocitates illæ continuo accreſcentes lineolis exprimantur, & hæ lineolæ non quidem mathematicæ omni latitudine carentes, ſed tanquam infinite ſubtiles & ſibi invicem contiguæ comprehendantur, (Fig. 11.) complebunt ipſæ areolam trianguli *a* 1 *b*, quod ſpatium repræſentat, quod corpus, velocitate uniformiter accreſcente, quodam temporis momento percurrit. Jam ſi corpus cum velocitate ultima acquiſita ſecundo momento moveri pergeret, ſpatium percurret rectangulo 1 *b k* 2 proportionale, quod eſt duplum trianguli *a* 1 *b*; ſed quia vis continuo corpus urgens velocitatem ejus accelerat, huic ſpatio accedet aliud, triangulo *b k c* proportionale, & priori *a* 1 *b* æquale; erit igitur ſpatium, quod corpus percurret duabus momentis, ad ſpatium quod percurrit primo momento, ut triangulum *a* 2 *c* ad triangulum *a* 1 *b*, hoc eſt, ut quadratum duorum momentorum ad quadratum unius, ſive ut 4 ad 1. Ita ſpatium, quod corpus, in tribus momentis percurret erit ad spatium primi momenti ut 9 ad 1, &c.

Si vis acceleratrix continuo augetur; lineolæ, quæ velocitates accrescentes exprimunt, areolas curvilineas *A D B*, *A E C*, (Fig. 10,) complent, quæ vero ipso motus initio ab areolis rectilineis *A D F*, *A E G*, non differunt, per *Lem.* præc. Ergo & in hoc casu spatia sunt in ratione duplicata temporum. Idem valet de vi continuo diminuta. Vis acceleratrix, qua corpora ad centrum terræ cadunt, continuo augetur, quo corpora propius ad centrum illud accedunt. Attamen in parvis a superficie terræ distantiis hæc vis ut constans & immutabilis sine errore supponitur, & corpora ab altitudine non ingenti cadentia tanquam in motus initio sunt consideranda; quare spatia quæ corpora non longinque a terræ superficie cadentia percurrunt (exclusa aëris resistentia) sunt in duplicata ratione temporum, ut experientia confirmat. Et vice versa, tempora corporum a diversa altitudine cadentium sunt in ratione subduplicata altitudinem. V. g. si corpus aliquod ab altitudine unius pedis decidit in uno momento temporis, idem aut aliud quodcunq; corpus decidet ab altitudine quatuor pedum duobus temporis momentis.

Coroll. Hinc facile colligitur, quod corporum similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus describentium errores, qui viribus quibusvis æqualibus ad corpora similiter

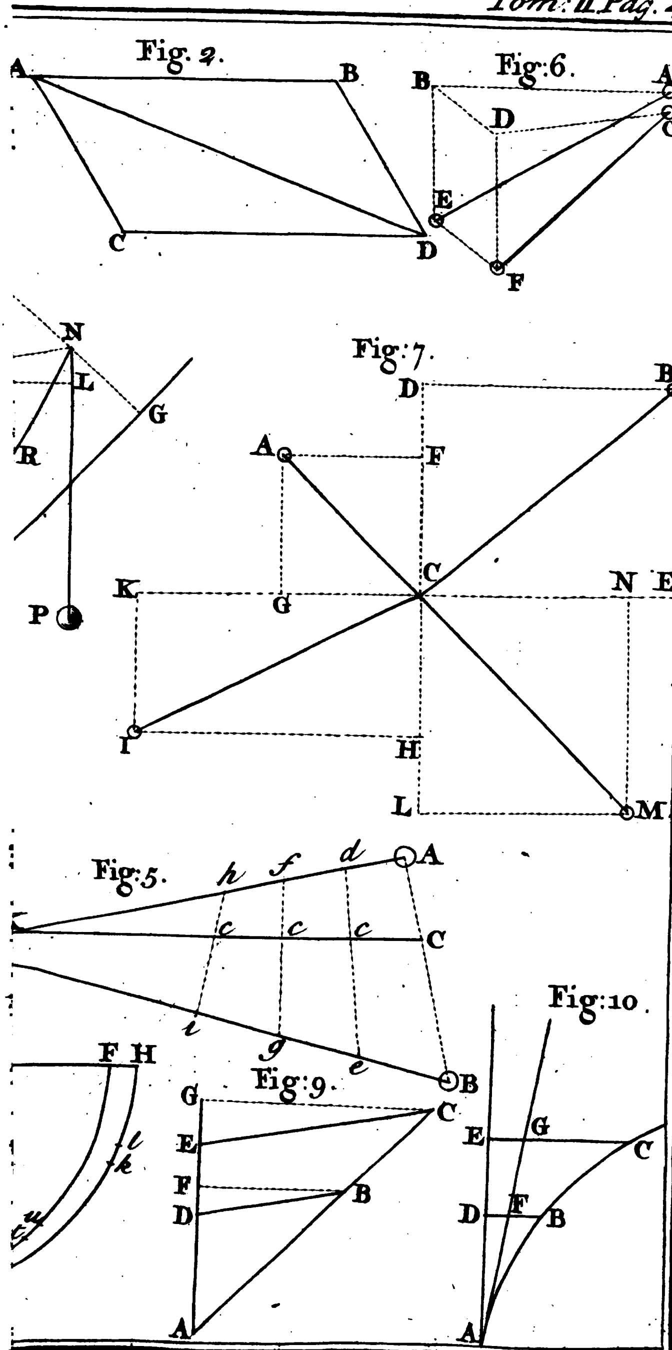


Fig. 2.
A
B
C
D
Fig: 6.
B
A
D
C
E
F
N
L
G
R
P
Fig: 7.
D
B
A
F
C
K
G
N
E
I
H
L
M
Fig: 5.
h
f
d
A
c
c
c
C
i
g
e
B
F H
l
k
u
Fig: 9.
G
C
E
F
B
D
A
Fig: 10.
E
G
C
F
D
B
A

ter applicata generantur & mensurantur, per distantias corporum a figurarum similium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus sine viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime. Errores autem, qui viribus inæqualibus ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim. V. g. Moveantur corpora *A* & *a* in ellipsibus *ABC* & *a b c* (Fig. 12.) similibus, & describant partes ellipsium similes *A B* & *a b* temporibus eis proportionalibus, ita ut si *A B* sit duplum ipsius *a b*, tempus motus illius sit ad tempus motus hujus itidem duplum. Accedant jam vires novæ motus hosce turbantes & accelerantes, quæ sint ut 3 ad 2, & sint ambæ in directione *A C*; jam corpora *A* & *a* ab ellipsibus deviabunt, & errores quæ mensurantur distantiis *B D* & *b d* a locis *B* & *b* erunt inter se ut 3 × 4 ad 2 × 1.

Prop. II. Corpora omnia in quacunque directione projecta & ab aëre non impedita Parabolas describunt. Sit corpus aliquod projectum (Fig. 13.) ab *A* in directione *A B*, hoc duplici vi urgebitur, una semel impressa in loco *A*, qua motu uniformi & temporibus proportionali procedit in recta *A B*; altera, quæ dicitur acceleratrix, continuo corpus ad centrum terræ urgente, cujus impulsu spatia 1.1, 2.4, 3.9, &c. percurrit, quæ sunt in duplicata ratione temporum sive rectarum *A* 1, *A* 2, *A* 3, per

Prop.

Prop. præced. Quare curva, quam corpus motu hoc composito describit, erit *A*, 1, 4, 9. Ducatur a puncto *A* recta *A C* rectæ 1. 1 parallela, & a punctis 1, 4, 9, rectæ parallelæ rectæ *AB*; & erunt rectæ *A I*, *A IV*, *A IX* abscissæ, & rectæ 1 *I*, 4 *IV*, 9 *IX*, ordinatæ illius curvæ, & per *Prop.* 37. Geom. constabit, curvam hanc esse Parabolam, quoniam abscissæ sunt in ratione duplicata ordinatarum.

Lemma 5. Sinus versi (Fig. 14.) *Ac*, *AC*, arcuum *Ab*, *AB*, sunt inter se in ratione duplicata chordarum *Ab*, *AB* eorundem arcuum. Nam per *Cor.* 2. *Prop.* 24. Geom. quadratum chordæ *Ab* est æquale rectangulo *AG* in *Ac*, & quadratum chordæ *AB* æquale rectangulo *AG* in *AC*; igitur quadratum chordæ *Ab* est ad quadratum chordæ *AB* ut rectangulum *AG* in *Ac* ad rectangulum *AG* in *AC*, hoc est, ut *Ac* ad *AC*.

Lemma 6. Prolongentur sinus *CB* & chorda *Ab* donec concurrant in *S*, & erit *AS* ad *AB* ut *AB* ad *Ab*. Est enim *AS* ad *Ab* ut *AC* ad *Ac*, hoc est, ut quadratum *AB* ad quadratum *Ab*; ergo *AS*, *AB*, *Ab* sunt continuo proportionales.

Prop. III. Tempora, quibus pendulum in Cycloïde oscillans a quocunque puncto Cycloïdis demissum ad imum verticis punctum *A* descendit, sunt inter se semper æqualia. Sit Cycloïs *DAT*, basis ejus *TD* & axis *GA*. Demittatur pendulum primum a puncto *E*, deinde

inde ab *F*; ducantur ex his punctis *E* & *F* rectæ *EC*, *Fc*, basi *TD* parallelæ, occurrentes circulo genitrici i.. *B* & *b*, & ex vertice *A* recta *AI* eidem basi parallelæ; & erunt chordæ *AB*, *Ab*, tangentibus *EI*, *FH*, parallelæ & æquales per *Coroll. Prop.* 98. Geom. Erunt etiam arcus Cycloïdis *E A* & *F A* altero tanto majores chordis *A B* & *A b*, per eandem *Propos.* quare illi eandem inter se, quam hæ, habent rationem. Quodsi ergo vires motrices, quæ velocitatibus semper sunt proportionales, initio motus in punctis *E* & *F* forent æquales, tempora descensus ad imum verticis *A* forent inter se ut arcus *E A* & *F A*, seu ut chordæ *B A* & *b A*. Sed quoniam vires istæ pendulique velocitates in datis punctis sunt inter se ut *A S* ad *A B* per. *Coroll. L.* 4. hoc est, per *Lem.* præc. ut chorda *AB* ad chordam *Ab*; igitur tempora descensus sunt inter se æquales. Sit v. g. arcus *E A* duplus arcus *F A*, & descendat corpus aliquod ab *E* per arcum *E A* dupla cum velocitate ejus, qua corpus aliud *F* descendit per arcum *F A*; & evidens est, corpus prius descendere per arcum *E A* eodem tempore, quo corpus alterum descendit per arcum *F A*, si utrumque velocitate constanti procederet; sed idem valet, si velocitas utriusque in eadem ratione continuo augetur. Supponatur enim spatium *E e*, quod prius corpus percurrit cum prima velocitate esse ad spatium *Ff*, quod corpus alterum percurrit cum prima sua velocitate eodem temporis momento,

ut

ut 2 ad 1; & utrumque corpus acquisivisse in punctis *e* & *f* velocitatem prioris suæ duplam; certum est spatium quod prius corpus percurrit fore ad spatium quod alterum percurrit, eodem temporis momento itidem ut 2 ad 1, & sic deinceps.

Coroll. 1. Ergo oscillationes omnes penduli in Cycloïde sunt isochronæ. Et quoniam arcus minimi circuli, longitudine penduli descripti, in ima parte Cycloïdis ab arcubus ejus sensibiliter non differunt; igitur & oscillationes penduli in arcubus circuli perexiguis sensibiliter sunt isochronæ. Sed in arcubus majoribus tempora oscillationum satis longe differunt. Sic sane ex *Hugenii* calculo tempus oscillationis per semiperipheriam circuli est ad tempus oscillationis per arcum minimum ejusdem circuli aut arcum quemvis Cycloïdis ut 34 ad 29, si oscillationes in vacuo fieri sine ulla aëris resistentia supponatur.

Coroll. 2. Longitudines pendulorum in diversis Cycloïdibus oscillantium sunt in ratione duplicata temporum. V. g. Sit longitudo unius penduli 4 pedum, & alterius unius pedis; erit tempus oscillationis illius ad tempus oscillationis hujus ut 2 ad 1. Nam quoniam omnes Cycloïdes sunt sibi invicem similes, erunt arcus similes Cycloidum in eadem ratione ut longitudines pendulorum, & tangentes ad puncta extrema arcuum istorum eandem habebunt positionem ad axes Cycloidum; igitur velocitates primæ

sunt

ſunt inter ſe æquales & tempora deſcenſus per arcus ſimiles ſunt in eadem ratione ac tempora deſcenſus perpendicularis per longitudines pendulorum, hoc eſt, per *Prop.* 1. in ratione ſubduplicata longitudinum; quare longitudines ſunt in ratione duplicata temporum deſcenſus ſive oſcillationum; quippe quæ dupla ſunt temporum deſcenſus. Nam tempus aſcenſus æquale ſemper eſt tempori deſcenſus; quippe quantum velocitas in deſcenſu acceleratur, tantum in aſcenſu retardatur.

Coroll. 3. Ex *Hugenii* demonſtratis tempus deſcenſus per arcum quemvis Cycloïdis eſt ad tempus deſcenſus perpendicularis corporis cujuſvis per diametrum circuli generatricis, ut ſemiperipheria circuli ad ejus diametrum, ſive ut peripheria ad duplum diametri; igitur tempus oſcillationis (quod eſt duplum temporis deſcenſus) eſt ad tempus deſcenſus perpendicularis corporis per quadruplum diametri circuli generatricis, ſive per duplum longitudinis penduli, in eadem ratione. Eſt vero peripheria ad duplum diametri ut 355 ad 226 circiter, quam rationem exprimere liceat per a ad b. Sit tempus oſcillationis unum minutum ſecundum, & erit tempus corporis per duplum longitudinis penduli cadentis $\frac{b}{a}$. Eſt vero longitudo penduli, cujus oſcillatio in uno temporis minuto ſecundo

ſit

fit pedum trium Parisiensium & linearum $8\frac{1}{2}$, cujus duplum est 73 dig. 5 lin. quod ponatur c; & erit per *Prop.* 1. quadratum temporis $\frac{b}{a}$, quod est $\frac{bb}{aa}$, ad quadratum unius minuti secundi, quod est 1, ut c ad spatium, per quod corpus descendit unius minuti secundi intervallo, quod est $\frac{aac}{bb}$, hoc est $\frac{355 \times 355 \times 881 \text{ lin.}}{226 \times 226}$, hoc est 15 ped. 1 dig. $1\frac{7}{9}$ lin. Paris.

De inventione virium centripetarum.

Propositio IV. Areæ quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus sunt sitæ, & temporibus proportionales. Dividatur enim tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi impressa secundum directionem quamcunque & centripeta conjunctim quamvis rectam *AB*. (Fig. 15.) Idem secunda temporis parte, si nihil impediret, aut nulla vis denuo urgeret, recta pergeret ad *c*, per L. 1. describens lineam *B c* æqualem ipsi *AB*. Ducantur rectæ *S B*, *S c*, & erunt triangula *A BS* & *B c S*, propter æquales bases *A B*, *B c*, & eandem altitudinem verticis *S*, inter se æqualia. Verum ubi corpus venit ad *B*, agat vis centripeta impulsu novo, priori aut æquali aut inæquali,

quali, efficiatque, ut corpus de recta *B c* declinet & pergat in recta *B C*, agatur *c C* ipsi *B S* parallela occurrens *B C* in *C*; & completa secunda temporis parte corpus per L. 4. reperietur in *C* in eodem plano cum triangulo *A S B*. Junge *S C*; & triangulum *S B C* ob parallelas *S B*, *C c*, æquale erit triangulo *S B c*, atque ideo etiam triangulo *S A B*. Simili argumento, si vis centripeta successive agat in *C*, *D*, *E*, faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas *C D*, *D E*, *E F*, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano, & triangula *S C D*, *S D E*, *S E F*, &c. erunt omnes inter se & triangulo *S A B* æquales. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ describuntur: Et componendo sunt arearum summæ quævis *S A D S*, *S A F S*, inter se ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus, & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter *A D F* erit linea curva: Ideoque vis centripeta, qua corpus a tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indesinenter; & areæ quævis descriptæ erunt temporibus, quibus describuntur, etiam hoc casu proportionales. *Q. E. D.*

Coroll. 1. Velocitates corporis in centrum immobile attracti, quæ proportionales sunt arcubus minimis eisdem momentis descriptis, sunt in spatiis non resistentibus reciproce, ut perpendicula a centro illo in orbis tangentes rectilineas demissa. Nam in triangulis æquali-

bus

bus si bases sunt inæquales, altitudines eorum sunt in ratione reciproca basium.

Coroll. 2. Tempora, quibus arcus æquales describuntur, sunt in perpendiculorum istorum ratione directa.

Coroll. 3. Si chordæ binæ arcuum quam minimorum iisdem momentis descriptorum *A B*, *B C*, & *D E*, *E F*, compleantur in rectangula *A B C V*, & *F E D Z*, & ducantur diagonales *B V*, & *E Z*; hæ ipsæ tendent in centrum *S*, & erunt inter se, ut vires centripetæ. Ducantur diagonales *C A*, & *F D*; hæ ipsæ bisecabunt diagonales *B V* & *E Z*; quare sagittæ arcuum minimorum *C A* & *F D* æqualibus temporibus descriptorum convergunt ad centrum virium *S*, & sunt ut vires centripetæ.

Coroll. 4. Si areæ temporibus iisdem descriptæ sunt inter se æquales & similes, corpus movetur in peripheria circuli; quod ut fiat necessum est, ut vis impressa sive projectilis sit in directione ad radium perpendicularis, & ut vis centripeta centrifugæ sit æqualis. V. g. Repræsentet linea *a b* (Fig. 16.) vim impressam, & ducatur à puncto *b* recta *d b*; fiat *c d* æqualis *c a*; & dividetur vis *a d* in vires *a b* & *d b*, quarum hæc centrifuga dicitur. Ergo ut corpus motum in peripheria circuli retineatur, opus est ut vis centripeta huic sit æqualis.

Coroll. 5. Ideoque vires eædem sunt ad vim gravitatis, ut hæ sagittæ ad sagittas horizonti ti perpendiculares arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore describunt.

Coroll. 6. Eadem obtinent per L. 7. ubi plana, in quibus corpora moventur, una cum centris virium, quæ in ipsis sita sunt, non quiescunt, sed moventur uniformiter in directum.

Propositio V. Corpus omne quod movetur in linea aliqua curva in plano descripta, & radio ducto ad punctum immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum. Nam omne corpus, quod movetur in linea curva, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem, & vis illa, si areæ temporibus illis sunt proportionales, agit in loco *B* secundum lineam parallelam ipsi *C c*, hoc est secundum lineam *B S*; & in loco *C* secundum lineam ipsi *d D* parallelam, hoc est secundum lineam *S C*, &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile. *Q. E. D.*

Coroll. 1. In spatiis vel mediis non resistentibus, si areæ non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radiorum; sed inde declinant in consequentia, seu versus plagam, in quam fit motus, si modo arearum descriptio acceleratur: Sin retardatur declinant in antecedentia. In mediis etiam resistentibus, si arearum descriptio acceleratur, declinant in consequentia.

Scholium. Si vis centripeta ex pluribus viribus in directione diversa est composita, tendit ea in directione intermedia ad punctum *S* tanquam omnium virium centrum commune. V. g. Si corpus *A* (Fig. 17.) trahatur a duabus viribus in directione *A B* & *A C*, versus puncta *B* & *C* conjunctim, quæ vires sint inter se ut *A b* ad *A c*. Compleatur rectangulum *A b d c*, & ducatur diagonalis *A D*; hæc ipsa erit vis centripeta. Jungantur puncta *B* & *C* recta *B C*, & prolongetur *A D*, donec occurrat rectæ *B C* in *D*, & erit punctum *D* centrum vis centripetæ.

Propositio VI. Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi composita ex vi centripeta tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice, qua corpus illud alterum urgetur. Moveatur corpus *L* circa corpus *T* immobile, describatque areas temporibus proportionales. Quodsi vis aliqua nova acceleratrix urgeret corpus *T*, nec vero æque afficeret corpus *L*, hoc ipsum sola vi priori in corpus *T* tendens non pergeret describere areas temporibus proportionales, sed longius semper a corpore *T* recedens, aut propius ad illud accedens, tem-

poribus

poribus æqualibus areas valde inæquales describeret.

Coroll. Si corpus *L* radio ad alterum corpus *T* ducto describit areas, quæ cum temporibus collatæ sunt valde inæquales; & corpus illud alterum *T* vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum: Actio vis centripetæ ad corpus illud alterum *T* tendentis vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: Visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita ad aliud sive immobile, sive mobile centrum dirigitur per *Scholium Prop.* præced.

Lemma 7. Sinus versi arcuum minimorum in diversis circulis sunt inter se, ut arcuum seu sinuum quadrata applicata ad circulorum diametros. Sint $A\,C$ (Fig. 18.) & $a\,c$ sinus versi arcuum $A\,D$ & $a\,d$, & vocentur x & z, sit $C\,D = y$, & $c\,d = u$; sit denique diameter $A\,B = a$, & $a\,b = b$: Et erit per *Coroll. Prop.* 24. *Geom.* $a\,x - x\,x = y\,y$, & $b\,z - z\,z = u\,u$; quare $\frac{y\,y}{a-x} = x$, & $\frac{u\,u}{b-z} = z$. Sed in arcubus quam minimis arcus $A\,D$ & $a\,d$ sinibus $C\,D$ & $c\,d$ sunt æquales, & puncta C & c cum punctis A & a coincidunt. Igitur differentiæ inter $A\,B$ & $C\,B$, nec non inter $a\,b$ & $c\,b$ evanescunt; quare hoc casu

 erit

erit $\frac{yy}{a} = x$, & $\frac{uu}{b} = z$; & x erit ad z, ut $\frac{yy}{a}$ ad $\frac{uu}{b}$, hoc est, ut sinuum seu arcuum quadrata applicata ad circulorum diametros.

Prop. VII. Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetæ ad centra eorundem circulorum tendunt, & sunt inter se, ut arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios. Tendunt hæ vires ad centra circulorum per *Prop.* 5. & sunt inter se, ut arcuum minimorum eodem tempore descriptorum sagittæ, hoc est sinus versi in circulis per *Coroll.* 3. *Prop.* 4. hi vero sunt inter se ut arcuum quadrata applicata ad circulorum diametros, sive radios.

Coroll. Cum arcus illi sint ut velocitates corporum; vires centripetæ erunt ut quadrata velocitatum applicata ad radios circulorum, sive in ratione composita ex ratione duplicata velocitatum directe, & ratione simplici radiorum inverse. *E. g.* Sint velocitates inter se, ut C ad c, & radii, ut R ad r; erunt vires centripetæ, ut CC ad cc, & ut r ad R, hoc est, ut CCr ad ccR; sed r est ad R, ut $\frac{1}{R}$ ad $\frac{1}{r}$; quare ratio inversa sive reciproca duplici modo exprimi potest; & ratio CCr ad ccR est eadem, quæ ratio

tio $\frac{CC}{R}$ ad $\frac{cc}{r}$. Quare hæ expressiones promiscue usurpantur.

Prop. VIII. Corporum in diversis circulis diversa cum velocitate gyrantium vires centripetæ sunt in ratione composita ex ratione radiorum directe, & ratione duplicata temporum periodicorum inverse. Tempus periodicum vocatur illud temporis spatium, quo corpus totam peripheriam percurrit. Suppositis ergo velocitatibus æqualibus, quo major est peripheria circuli unius peripheria alterius, eo majus temporis spatium requiritur ad eam percurrendam; sed suppositis peripheriis æqualibus, quo major est velocitas unius corporis velocitate alterius, eo minori tempore illud curriculum suum absolvit, quam hoc. Quare tempora periodica duorum corporum in diversis circulis cum velocitate inæquali gyrantium sunt in ratione composita, ex ratione peripheriarum sive radiorum directe, & ratione velocitatum inverse; hoc est, si radii ponuntur, ut R ad r, & velocitates ut C ad c, tempora periodica erunt ut $\frac{R}{C}$ ad $\frac{r}{c}$, cujus rationis inversa est $\frac{C}{R}$ and $\frac{c}{r}$, hujusque duplicata $\frac{CC}{RR}$ ad $\frac{cc}{rr}$; cui si additur ratio radiorum directa R ad r, erit ratio composita

$\frac{CCR}{RR}$ ad $\frac{ccr}{rr}$, hoc est, ratio $\frac{CC}{R}$ ad $\frac{cc}{r}$, quæ est ratio virium centripitarum, per *Coroll.* præc.

Coroll. 1. Unde si tempora periodica æquentur; erunt vires centripetæ, ut radii: & contra.

Coroll. 2. Si tempora periodica & velocitates sunt in ratione subduplicata radiorum; æquales erunt vires centripetæ inter se. E. g. sit ratio radiorum R ad r, sitque hujus subduplicata $\sqrt{R}$ ad $\sqrt{r}$ ratio velocitatum & temporum periodicorum; & erit ratio virium centripetarum, per *Coroll. Prop.* 7. $\frac{\sqrt{R}\sqrt{R}}{R}$ ad $\frac{\sqrt{r}\sqrt{r}}{r}$; hoc est, $\frac{R}{R}$ ad $\frac{r}{r}$, & per *Prop.* 8. $\frac{R}{\sqrt{R}\sqrt{R}}$ ad $\frac{r}{\sqrt{r}\sqrt{r}}$ hoc est, $\frac{R}{R}$ ad $\frac{r}{r}$, quæ in utroq; casu est ratio æqualitatis.

Coroll. 3. Si tempora periodica sint ut radii, & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproce, ut radii: & contra. V. g. Sit ratio radiorum & temporum periodicorum R ad r, erit per *Prop.* 8. ratio virium centripetarum $\frac{R}{RR}$ ad $\frac{r}{rr}$, hoc est, $\frac{1}{R}$ ad $\frac{1}{r}$.

Coroll. 4. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicata radiorum, hoc est, si quadrata temporum periodicorum sint inter se, ut cubi ra-

radiorum, & propterea velocitates reciproce in radiorum ratione subduplicata; vires centripetæ erunt reciproce, ut quadrata radiorum: & contra. V. g. Sit ratio temporum periodicorum $R\sqrt{R}$ ad $r\sqrt{r}$, quæ est sesquiplicata rationis radiorum R ad r; erit ratio virium centripetarum $\frac{R}{R^3}$ ad $\frac{r}{r^3}$ (nam ipsorum $R\sqrt{R}$ & $r\sqrt{r}$ quadrata sunt R^3 & r^3) hoc est, $\frac{1}{R^2}$ ad $\frac{1}{r^2}$, quæ est ratio radiorum duplicata reciproce.

Coroll. 5. Et universaliter, si tempora periodica sint inter se, ut radiorum potestates quælibet R^n ad r^n; vires centripetæ erunt inter se reciproce, ut radiorum potestates $\frac{R}{R^{2n}}$ ad $\frac{r}{r^{2n}}$, sive R^{2n-1} ad r^{2n-1}; & velocitates erunt reciproce, ut radiorum potestates R^{n-1} ad r^{n-1}.

Sholium. Casum *Corollarii* quarti obtinere in corporibus cœlistibus, primus detexit *Keplerus*, eiq; Astronomi omnes suffragati sunt. Observandum autem est, Planetas non in circulis, sed in ellipsibus moveri, & vires eorum centripetas non centra, sed focos ellipsium petere. Quare ut *Corollarium* illud ad hunc casum recte applicetur, capienda est in Planetis inter distantiam maximam & minimam media, semiaxi ellipseos æqualis, eaq; pro radio adhibenda. Nam si hoc radio describatur circulus; erit hic ad ellipsin, ut axis major ad axem minorem, per *Cor.* 2. *Prop.* 56. Geom. & tempus periodicum corporis gyrantis in ellipsi erit æquale tempori periodico gyrantis in hoc circulo, ut infra *Prop.* 15. demonstrabitur. Quare per hoc *Coroll.* constat, Vires centripetas in diversis Planetis primariis decrescere in ratione duplicata distantiarum mediarum a sole; & in Planetis secundariis in ratione duplicata distantiarum a primariis suis. V. g. Si Planeta *A* altero tanto longius distat à sole, quam Planeta *B*; hujus vis centripeta quadrupla erit vis centripetæ illius. Sed & eandem regulam obtinere in uno eodemque Planeta, pro diversa a centrali corpore suo distantia, ex sequentibus patebit.

Prop. IX. Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur; & in diversis locis arcus quosvis jamjam nascentes tempore quam minimo describat inæqualibus viribus centripetis, & sagittæ arcuum duci intelligantur, quæ chordas bisecent: erunt vires centripetæ inter se in medio arcuum in ratione composita ex ratione sagittarum directe, & temporum duplicata inverse. Nam sagittæ dato tempore sunt, ut vires, per *Cor.* 3, *Prop.* 4. & si vires sunt æquales, sagittæ sunt in ratione duplicata temporum, per *Prop.* 1. Igitur si vires & tempora sunt diversa, sagittæ erunt in ratione composita ex ratione virium simplici, & temporum duplicata. V. g. Sint vires, ut V ad v, & tempora, ut T ad t, sintque sagittæ ut S ad s; erit $S.s::VTT$ ad vtt.

Sub-

Subducatur utrinque ratio duplicata temporum, & erit $\frac{S}{TT} \,.\, \frac{s}{tt} :: V.\, v.$ *Q. E. D.*

Coroll. Si corpus P revolvendo circa centrum (Fig. 19.) S describat curvam APQ; tangant vero rectæ ZPR & zpr curvam illam in punctis quibusvis P & p, & ad tangentes ab aliis quibusvis curvæ punctis Q & q agantur QR & qr, distantiis PS & ps parallelæ, ac demittantur QT & qt perpendiculares ad distantias illas; vires centripetæ in locis P & p erunt inter se ut solida

$$\frac{QR}{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}} \;\&\; \frac{qr}{Sp \text{ quad.} \times qt \text{ quad.}}$$

Nam QR & qr sunt æquales sagittis arcuum duplorum PQ & pq; & triangula SPQ & Spq, quæ corpus quibuscunque temporibus describit, aut eorum dupla rectangula $SP \times QT$ & $Sp \times qt$ sunt temporibus quibus describuntur proportionalia: ergo ratio eorum rationem temporum exponit. Quare ratio V ad v est æqualis rationi

$$\frac{QR}{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}} \text{ ad } \frac{qr}{Sp \text{ quad.} \times qt \text{ quad.}}$$

Propositio X. Si corpus aliquod gyretur in ellipsi; vires centripetæ in diversis ellipsis punctis, tendentes ad centrum ellipsis, erunt inter se in ratione directa distantiarum a centro. Sunto CA, CB, (Fig. 20.) semiaxes ellipseos; GP, DK diametri aliæ conjugatæ; PF, QT, perpendicula

pendicula ad diametros; Qu ordinatim applicata ad diametrum GP; & si compleatur rectangulum $QuPR$; erit rectangulum $Pu \times uG$ ad Qu quadratum, ut PC quad. ad CD quad. per *Prop.* 39. Geom. & (ob similia triangula QuT, PCF) Qu quad. est ad QT quad. ut PC quad. ad PF quad. Et junctis rationibus, rectangulum $Pu \times uG$ est ad QT quad. ut PC quad. $\times$ PC quad. ad CD quad. $\times$ PF quad. Hoc est, uG ad $\frac{QT \text{ quad.}}{Pu}$ ut PC quad. ad $\frac{CDq. \times PFq.}{PCq.}$ Sed Pu est æqualis QR, & $BC \times CA$ æqualis $CD \times PF$ per *Caroll.* 1. *Prop.* 56. Geom. nec non, punctis P & Q coëuntibus, $2\,PC$ æqualis uG, quare substitutis loco Pu, $CD \times PF$, & uG; earum valoribus, erit $2\,PC$ ad $\frac{QTq.}{QR}$ ut $PCq.$ ad $\frac{PC \times CA}{PCq.}$; & ductis extremis & mediis in se mutuo, erit $\frac{QTq. \times PCq}{QR} = \frac{2\,BCq. \times CAq.}{PC}$.

Eodem modo probatur $\frac{qtq. \times pcq.}{qr}$ esse æquale $\frac{2\,BCq. \times CAq.}{pc}$. Sunt vero vires cen-

tripetæ

tripetæ per *Coroll. Prop.* præc. ut $\frac{QR}{QTq.\times PCq.}$ ad $\frac{qr}{qtq.\times pcq.}$ Quare ex æquo ut $\frac{PC}{2BCq\times CAq.}$ ad $\frac{pc}{2BCq\times CAq.}$ hoc est ut PC ad pc.

Lemma 8. Ductis ex quovis puncto ellipseos P rectis (Fig. 21.) PS, PH, ad focos S & H, & diametro DK, conjugata diametro PG, secante PS in E; dico PE esse æqualem semiaxi CA. Ducatur enim ex foco H recta HI parallela diametro DK, & ad punctum P tangens ellipsin, quæ diametro etiam est parallela, per *Cor. Prop.* 31. Geom. & erunt per *Prop.* 46. Geom. anguli SPR & HPZ, & propter parallelas IH, RZ, anguli PIH & PHI, inter se æquales: quare PI æqualis erit PH. Sed SP, PH simul sumptæ æquantur axi, per *Prop.* 51. Geom. & SI est earum differentia; & propter SC & CH æquales, SE & EI sunt etiam inter se æquales: quare EI est semidifferentia; hacce addita lineæ minori PH, aut ejus æquali PI, summa PE æquabitur semiaxi CA.

Prop. XI. Quodsi vires centripetæ corporis gyrantis in ellipsi tendunt ad umbilicum seu focum ellipseos; hæ vires sunt inter se in ratione duplicata distantiarum corporis a foco inverse. Esto ellipseos focus S. Agatur SP secans ellipseos

lipseos tum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatum Qu in x, & compleatur parallelogrammon $QxPR$; per *Lemm.* præc. $E\mathcal{P}$ æqualis est semiaxi majori AC. Ad $S\mathcal{P}$ demittatur perpendicularis QT, & ad diametrum conjugatem DK perpendicularis $\mathcal{P}F$. Ponatur $EP=AC=a$, $BC=b$. Latus rectum principale $\frac{2bb}{a}=l$, $C\mathcal{P}=c$, $DC=d$, $F\mathcal{P}=f$. Et, ubi arcus $Q\mathcal{P}$ est nascens, $Gu=2c$, $Qx=Qu=y$, $Pu=x$, $QR=\mathcal{P}x=r$, $QT=t$; & erit

$r.x :: a.c$; &

$lx. 2cx :: l. 2c$; &

$2cx.yy :: cc.dd$; per *Prop.* 39. Geom.

$yy.tt :: aa.ff$; & propter parallelogramma df & ba æqualia, per *Cor.* 1. *Prop.* 56. Geom.

$aa.ff :: dd.bb$; & conjunctis his omnibus rationibus.

$lr.tt :: al.2bb$ Est vero $\frac{2bb}{a}=l$; ergo $al=2bb$; per consequens & $lr=tt$, hoc est, $l\times QR=QTq$. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$; & fiet $l\times SPq.=\frac{SPq.\times QTq.}{QR}$ Eodem modo probatur $l\times spq.$ æquale esse $\frac{spq.\times qtq.}{qr}$ Sed per *Coroll. Prop.* 9. $\frac{QR}{SPq.\times QTq.}$ & $\frac{qr}{s.p.q.\times qtq.}$ Sunt inter se

ut

ut vires centripetæ in punctis P & p; ergo eædem vires sunt in ratione $l \times S\,P\,q.$ ad $l \times s\,p\,q.$ inverse, hoc est in ratione duplicata distantiarum a foco inversa. *Q. E. D.*

Coroll. Quoniam ellipsium genera infinite variant, pro diversa centri a focis distantia, in omnibus vero eædem regulæ de viribus centripetis in propositionibus præcedentibus demonstratæ obtinent: Per eandem rationem, ubi centrum a foco infinite distat, omnesq, diametri sunt inter se parallelæ, (quo casu ellipsis transit in parabolam); aut ubi centrum longius (ut ita dicam) quam infinite distat, hoc est, ubi diametri intra curvam magis magisque divergunt, a parte vero adversa prolongatæ in uno eodemque puncto extra curvam concurrunt, quod punctum centrum vocatur (quo casu ellipsis in hyperbolam convertitur); eædem leges de viribus centripetis stant firmæ, viz. eas tendentes ad focos parabolarum aut hyperbolarum esse in ratione duplicata distantiarum a focis reciproce; sed tendentes ad centra earundem esse in ratione distantiarum a centris directe. Sic in parabola, ubi distantiæ omnes a centro sunt infinitæ, ideoque inter se æquales; vires centripetæ sunt etiam inter se æquales, & directiones earum sunt inter se parallelæ. Et vice versa, si vires centripetæ in omnibus punctis curvæ, quam corpus aliquod describit, sunt sibi invicem æquales & di-

directiones earundem inter se parallelæ; hæc curva est parabola, sicut *Prop.* 2. alio modo demonstratum est.

Coroll. 2. Quodsi vires centripetæ sunt in ratione duplicata distantiarum inverse; corpora in ellipsi, aut parabola, aut hyperbola, gyrantur; ipsæque vires centripetæ ad harum curvarum umbilicos tendunt.

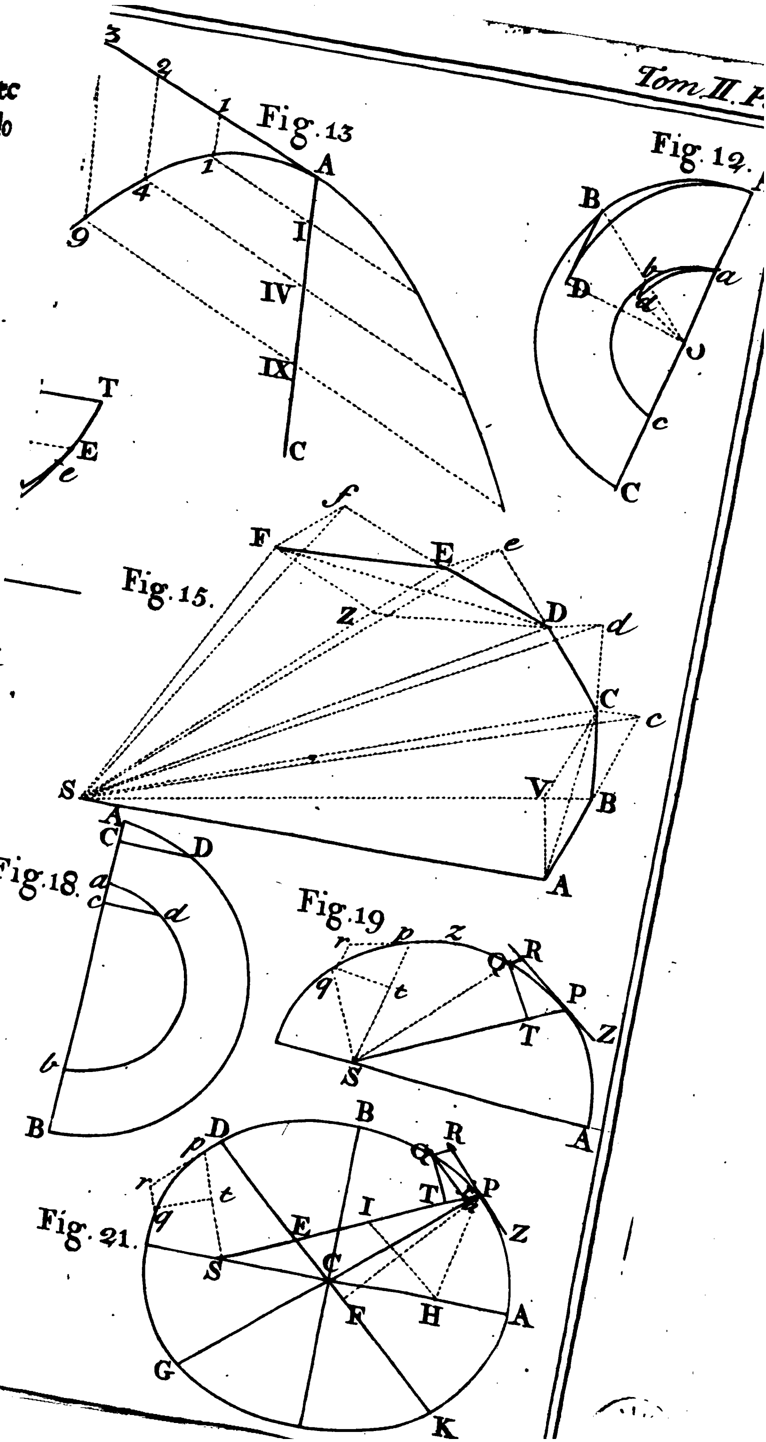
Scholium. Igitur ex sola virium centripetarum ratione determinari nequit, quam harum trium, multo minus, (quoniam ellipses & hyperbolæ infinitis modis variant) quam ellipsis aut hyperbolæ speciem corpus aliquod gyrans describat; sed illud ex ratione distantæi umbilicorum ad axin, aut distantiarum inter se ratione & positione, aut aliis circumstantiis, est determinandum. Qua de re, cui placet, conferat Autorem in Libro I. Sectione 4ta & 5ta, ubi admodum ingeniose de trajectoriarum descriptione agit.

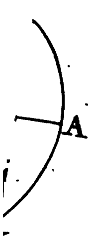
Prop. XII. Vires centripetæ corporis in spirali æquiangula gyrantis tendentes ad centrum spiralis sunt inter se in ratione triplicata distantiarum a centro inverse. In spirali æquiangula arcus similes sunt in eadem inter se ratione, ut arcus similes circulorum, viz. in ratione radiorum; igitur tanquam arcus circulares considerari possunt. Sed per *Prop.* 8. vires centripetæ sunt in ratione composita ex ratione sagittarum directe, & ratione temporum inverse, & per *Coroll.* 2. *Prop.* 4. tem-

hæc
nodo

it in
cor-
vola,
tum

ita-
tum
hy-
lip-
iod
m-
m
ui
ne





4. tempora, quibus arcus æquales a corpore in quacunque curva gyrante describuntur, sunt ut perpendiculares $R S$, $r S$, (Fig. 22.) quæ a centro S ducuntur in tangentes $P R$, $p r$, hoc est, in spirali hac, propter triangula $P R S$, $p r S$, similia, ut radii $S P$, $S p$. Ponatur radius $P S = a$, & $p S = b$; & erunt tempora, quibus arcus similes describuntur, ut a ad b. Et per *Prop.* 7. *Lemma* 7. Sagittæ, sive sinus versi arcuum minimorum in diversis circulis sunt, ut quadrata arcuum applicata ad diametros sive radios. Positis ergo arcubus æqualibus, erunt sagittæ, ut $\frac{1}{a}$ ad $\frac{1}{b}$. Ergo vires centripetæ sunt, ut $\frac{1}{aa} \times \frac{1}{a}$ ad $\frac{1}{bb} \times \frac{1}{b}$. *Q. E. D.*

Propositio XIII. Velocitas corporis gyrantis in parabola est in vertice parabolæ ad velocitatem corporis, quod devolvitur in circulo, cujus radius æquatur distantiæ foci parabolæ ab ejus vertice, in subduplicata numeri binarii ad unitatem ratione, sive ut $\sqrt{2}$ ad 1. Distantia enim foci a vertice parabolæ est quadrans lateris recti principalis, per *Prop.* 44. Geom. Quare diameter circuli est ejus dimidium. Sed vires centripetæ in iisdem distantiis a foco cum sint æquales, etiam subtensæ angulorum contactus utrinque, viz. ad para-

parabolam æque ac circulum, eodem tempore erunt æquales. Est vero subtensa, quam vis centripeta producit in parabola, æqualis abscissæ; & in circulo, sinui verso arcus eodem tempore descripti. Igitur in arcubus quam minimis, ubi ordinatæ vel sinus ab arcubus eorumque tangentibus non differunt, erit arcus parabolæ minimo tempore descriptus æqualis radici quadratæ subtensæ ductæ in latus rectum per *Prop.* 38. Geom. & arcus circularis eodem tempore descriptus æqualis radici quadratæ ejusdem subtensæ ductæ in circuli diametrum, per *Prop.* 24. Geom. Quare arcus parabolicus est ad arcum circularem eodem tempore quam minimo descriptum, hoc est, velocitas corporis in parabola est ad velocitatem ejus in circulo, ut $\surd 2$ ad $\surd 1$.

Propositio 14. Velocitas corporis gyrantis in ellipsi circa focum ejus est in media ejus a foco distantia, semiaxi majori æquali, ad velocitatem corporis gyrantis circa centrum circuli, cujus radius æquatur eidem semiaxi majori ellipsis, in ratione æqualitatis. Ponatur distantia foci a vertice proximo c, axis major a, parameter b, arcus minimus y, abscissa x; & erit arcus minimus ellipsis inde ab ejus vertice, ad arcum minimum circuli radio c eodem tempore descriptum, hoc est, velocitas corporis gyrantis circa focum ellipsis

lipsis in ejus vertice, ad velocitatem corporis in circulo, cujus radius æqualis est c, ut $\sqrt{bx}$ ad $\sqrt{2cx}$, sive ut $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{2c}$. Est enim arcus minimus in ellipsi æqualis ordinatæ, & in circulo sinui ejus; & cum abscissa x sit infinite parva, altera pars axis majoris in ellipsi, aut diametri in circulo, æquatur toti axi majori, aut diametro circuli; quare in ellipsi est $y = \sqrt{\frac{abx}{a}} = \sqrt{bx}$, per *Prop.* 40. Geom. & in circulo $y = \sqrt{2cx}$, per *Prop.* 24. Geom. Sed in ellipsi velocitas corporis in vertice est ad velocitatem ejus in distantia semiaxi æquali in ratione distantiæ foci a vertice ad semiaxem minorem inverse, per *Coroll.* 1. *Prop.* 4. hoc est, ut $\frac{1}{c}$ ad $\frac{1}{\frac{\sqrt{ab}}{4}}$; & velocitas corporis in diversis circulis gyrantis est in ratione radiorum subduplicata inverse, per *Coroll.* 4. *Prop.* 8. hoc est, ubi radii sunt c & $\frac{a}{2}$, ut $\sqrt{\frac{1}{c}}$ ad $\sqrt{\frac{1}{\frac{a}{2}}}$; quare velocitas corporis gyrantis in ellipsi circa focum in distantia semiaxi majori æquali est ad velocitatem corporis gyrantis in circulo, cujus radius eidem semiaxi ellipsis æquatur, ut $\frac{c\sqrt{b}}{\sqrt{\frac{ab}{4}}}$ ad $\frac{\sqrt{c}\sqrt{2c}}{\sqrt{\frac{a}{2}}}$, hoc est, ut $\frac{c\sqrt{4b}}{\sqrt{ab}}$ ad $\frac{\sqrt{c}\sqrt{4c}}{\sqrt{a}}$, sive ut $\frac{c\sqrt{4b}}{\sqrt{ab}}$ ad $\frac{c\sqrt{4}}{\sqrt{a}}$, hoc est, ut $\frac{1}{\sqrt{a}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{a}}$. *Q. E. D*

Propositio XV. Si corpus aliquod gyretur in ellipsi circa alterutrum ejus focum, & alterum in peripheria circuli, cujus radius æquatur semiaxi ellipsis, circa centrum ejus; tempora periodica horum corporum erunt inter se æqualia. Per *Prop.* præced. velocitas corporis in ellipsi gyrantis, in distantia a foco semiaxi æquali, æquatur velocitati corporis in circulo, cujus radius itidem æqualis est ellipsis semiaxi. Quare arcus minimi eodem tempore descripti sunt etiam inter se æquales, & area elliptica est ad aream circularem, ut semiaxis minor ad semiaxem majorem. Sed quoniam tota ellipsis habet ad circulum eandem rationem, per *Coroll.* 2. *Prop.* 56. Geom. & areæ in circulo æque ac in ellipsi sunt temporibus proportionales: Igitur tempora periodica in hoc casu sunt æqualia.

Coroll. 1. Quare tempora periodica corporum in ellipsibus diversæ speciei, æquales autem axes majores habentibus, sunt æqualia; si vero axes earum majores sunt inæquales, tempora corporum periodica sunt in ratione sesqui-

sesquiplicata horum axium directe, & velocitates eorum mediæ in ratione subduplicata eorundem axium inverse, ut in circulis *Coroll.* 4. *Prop.* 8. demonstratum est.

Coroll. 2. Quoniam tempora periodica corporum in diversis circulis gyrantium, si vires centripetæ sunt in ratione duplicata diametrorum inverse, sunt in ratione sesquiplicata diametrorum directe per *Cor.* 4. *Prop.* 8. & tempora, quibus corpora ex diversis altitudinibus decidunt sunt horum temporum periodicorum dimidia; igitur & ipsa sunt in ratione sesquiplicata altitudinum.

Propositio XVI. *Problema.* Posito, quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro, spatia definire, quæ corpus recta cadendo datis temporibus describit. Si corpus non cadit perpendiculariter; describit, per *Prop.* 11. *Coroll.* 2. sectionem aliquam conicam, cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit sectio illa conica ellipsis *APRB*, & umbilicus ejus *S* (Fig. 23.) Super hujus axe majore *A B* describatur semicirculus *A D B*, & per corpus decidens *P* transeat recta *D P C* perpendicularis ad axem, ductisque *D S*, *P S*, erit area *A S D* ad aream *A S P*, in ratione circuli ad ellipsin, sive axis majoris ad minorem, per *Prop.* 56. *Coroll.* 3. *Geom.* & utraque tempori proportionalis. Manente axe *A B*, minuatur perpetuo latitudo, sive axis minor ellipseos, & semper manebit area *A S D* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum; & orbe *A P B* jam coincidente cum axe *A B*, & umbilico *S* cum axis termino *B*, deſcendet corpus in recta *AC*, & area *A B D* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque ſpatium *A C*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato deſcribit; ſi modo tempori proportionalis capiatur area *A B D*, & a puncto *D* ad rectam *A B* demittatur perpendicularis *D C*.

Exemplum. Si luna, ſive aliud corpus, è diſtantia 60 ſemidiametrorum terræ recta deſcendat in terram, quæritur quantum ſpatii percurrat unius diei tempore? Semidiameter terræ eſt pedum Pariſienſium 19615800; ergo diſtantia lunæ a terra ſi ponitur 60 ſemidiametrorum terræ, erit pedum Pariſiens. 1176948000, & ſemiperipheria circuli *A D B* 1848244000. Sed luna per *Coroll.* 2. *Prop.* 15. & *Probl.* ſeq. hanc ſemiperipheriam percurrit tempore 4 d. 19 h. 46'. ſive 6946 min. Ergo unius minuti primi tempore percurrit arcum 266160 pedum circiter. Multiplicetur hic per quartam partem diametri *A B*, & productum hoc per 1440 min. (quæ uno die continentur) factum æquabitur areæ *A O E*. Fiat ei æqualis area *A B D*; hæc area compoſita eſt ex triangulo *O B D*, & ſectore *AOD*: Prius æquatur producto $\frac{OB \times CD}{2}$, & alter

pro-

producto $\frac{OB}{2} \times AD$, & summa eorum producto $\overline{CD + AD} \times \frac{OB}{2}$. Quodsi ergo area ADB dividatur per $\frac{OB}{2}$, hoc est; per quartam partem diametri AB; habebitur $AD + CD$, quibus æqualis est arcus AE, hic reductus ad partes sinus totius 1000000.^{mas} dabit partes 6513000. ut ex computo sequenti elucet:

Log. 266160 ped.	5.4251428
Log. 1440. min.	3.1583625
Log. arcus AE	8.5835053
Log. $S.$ $T.$ 10000000.	7.0000000
	15.5835053
Log. semid. AB 588414000.	8.7697253
	6.8137800

hujus logarithmi numerus est 6513000. Capiatur ex tabulis sinuum graduum 18, 50′ sinus, qui est 3228164, & multiplicetur sinus unius minuti primi, qui arcui suo est quam proximus, 2909 per minuta 1130; prodibit numerus 3.287170, qui priori 3228164 additus dabit 6,515334, qui cum numero 6513000 satis accurate congruit. Capiatur ergo gradu-num 18, 50′ sinus versus, qui est 535384, & reducatur hic ad pedes Parisienses; & habebitur linea *A C*, per quam luna unius diei spatio descendit, viz. 31505800 pedes Parisienses, ut ex computo sequenti elucet:

Log. semid. *A B*	8.7697253
Log. 535384	5.7286653
	14.4983906
Log. *S. T.*	7.0000000
	7.4983906

Hujus logarithmi numerus est 31505800.

Propositio XVII. *Problema.* Posito, quod vires centripetæ sint in ratione duplicata distantiarum inverse, tempora definire quo corpora recta cadendo centrum attingent. Per *Prop.* præced. patet corpus recta decidendo ex *A* in *B* eodem tempore pervenire ad punctum *B*, quo gyrando circa centrum circuli *O* absolvit semipheriam *A D B*. Sit distantia corporis $2a$, tempus periodicum ejus b. Quoniam tempora periodica sunt in ratione sesquiplicata distantiarum in ellipsibus æque ac circulis, per *Cor.* 4. *Prop.* 8. & *Cor.* 1. *Prop.* 15. Igitur tempus periodicum corporis in distantia a, prioris semissi, erit $\frac{b\,a\sqrt{a}}{2a\sqrt{2a}} = \frac{b}{2\sqrt{2}}$, cujus dimidium $\frac{b}{4\sqrt{2}}$ est tempus, quo corpus decideret in centrum.

Ex-

Exemplum. Sit distantia terræ a sole 10.000000. & tempus periodicum ejus 365 dies, 6 hor. sive 58766 horæ, quæ si dividuntur per $4\sqrt{2}$ $=5.664$, &c. erit quotiens 1548 hor. hoc est 64 dies, 12 hor. tempus, quo terra decideret in solem, si motus ejus projectilis cessaret.

Propositio XVIII. *Problema.* Supposita eadem ratione virium centripetarum, tempus definire, quo corpus recta in centrum descendens per spatium datum quodvis decidit. Spatium hoc est sinus versus *A C.* Reducatur illud ad partes sinus totius, & quæratur arcus ejus & sinus in tabulis. Reducantur arcus gradus & minuta ad partes sinus totius, & addantur sinui; summæ hujus dimidium multiplicatum per sinum totum producet aream circularem *A B D* tempori quærendo proportionalem. Ipsum ergo tempus sequenti analogia invenitur: Ut semissis areæ circularis, cujus radius est 10.000000 est ad aream inventam; sic tempus omne, quo corpus decidit ex *A* in *B*, ad tempus, quo decidit per spatium *AC.*

Exemplum. Quæritur tempus, quo luna aut corpus quodcunque e distantia lunæ a terra decideret per 6376 milliaria Anglica, cum pedibus 2110, sive per 33.667390. pedes. Hæ ad partes sinus totius reductæ faciunt 535382 partes, & hæ sunt sinus versus arcus 18 gr. 50 min. qui gradus cum minutis ad partes sinus totius reducti faciunt 3.287170. partes, quæ sinui arcus ejusdem 3.228165

 ad-

additæ faciunt 6.515335, quarum semissis est 3.257667. Numerus hic multiplicatus per sinum totum producit 3.25766700000000, aream circularem *A B D* tempori proportionalem. Per *Prop.* 23. Geom. constat semissem areæ circularis, cujus radius est 10.000000 esse 15707963, &c. & tempus omne, quo corpus decidit per totam distantiam lunæ a terra, invenitur per *Prob.* præc. 6955 min. circiter. Ergo tempus quo decidit per spatium datum prodibit 1442. min. hoc est, 24 hor. circiter.

Propositio XIX. Si corpora duo *S* & *P* viribus (Fig. 24.) quibusvis se mutuo trahentia revolvuntur circa gravitatis centrum commune: figuris quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest alterutrum eorum *P* figuram similem circum corpus alterum *S* immotum ad eandem distantiam viribus iisdem describere; simodo velocitas corporis *P* gyrantis circa corpus *S* sit ad velocitatem priorem circa centrum commune *C* in ratione subduplicata distantiæ *P S* ad distantiam *P C.* Revolvantur corpora *S* & *P* circa centrum gravitatis commune *C* quiescens, & erunt distantiæ *C P*, *C S*, & *C Q*, *C T* semper inter se in eadem ratione; ideoque curvæ *ST*, *PQ*, quas describunt circa centrum commune, erunt inter se similes. Fiat *s p* æqualis *S P*, & angulus *p s q* æqualis angulo *P C Q*, & moveatur linea *s q* circa *s* eadem velocitate, ut ut $T Q$ circa C, sitque $PS = ps$ ad qs in eadem semper ratione ut PC ad QC; erit curva, quam corpus p describit circa s, similis curvis PQ, ST, eisdemque simul sumtis æqualis: Nam motus corporis p est similis motui corporum P & S & utrique simul sumto æqualis. Ducantur tangentes PR & pr ad puncta curvarum P & p, & producantur CQ & sq, donec occurrant tangentibus his in punctis R & r; & erunt propter figuras $CPRQ$ & $sprq$ similes, QR ad qr, ut radius CQ ad sq. Proinde si vis qua corpus P versus S, atque ideo versus centrum intermedium C, attrahitur, esset ad vim, qua corpus p versus centrum s attrahitur, in eadem illa ratione data; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus PR, pr, ad arcus PQ, pq, per intervalla ipsis proportionalia RQ, rq; ideoque si velocitas corporum P & p sit inter se in eadem ratione data, vis posterior efficeret, ut corpus p gyraretur in curva pqu, simili curvæ PQV, & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione CP ad sp, sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum S & s, P & p, & æqualitatem distantiarum SP, sp) sibi mutuo æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: Et propterea ut corpus posterius p trahatur per intervallum

tervallum majus $r\,q$, requiritur tempus majus, idque in subduplicata ratione intervallorum; propterea quod per *Prop.* 1. spatia ipso motus initio descripta sunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis p esse ad velocitatem corporis P in subduplicata ratione distantiæ $s\,p$ ad distantiam $C\,P$, eo ut temporibus, quæ sint in eadem ratione subduplicata, describantur arcus $p\,q$, $P\,Q$, qui sunt in ratione integra: Et corpora viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia C & s figuras similes. Idem etiam verum est, si centrum gravitatis commune progreditur uniformiter in directum per L. 8.

Coroll. 1. Hinc corpora duo viribus distantiis suis proportionalibus se mutuo trahentia describunt & circum centrum commune gravitatis, & circum se mutuo, ellipses concentricas; & viribus distantiarum suarum quadratis reciproce proportionalibus describent & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, sectiones conicas, quarum umbilicus coincidit cum centro, ad quod corpora attrahuntur: & vice versa. Et in utroque casu describunt radiis ad centrum gravitatis ductis areas temporibus proportionales.

Coroll. 2. Corporum duorum S & P, circa commune gravitatis centrum C revolventium, tempus periodicum est ad tempus periodicum corporis alterutrius P, circa alterum immotum S gy-

S gyrantis, & figuris, quæ corpora circum se mutuo describunt, figuram similem & æqualem describentis, in subduplicata ratione corporis alterius *S* ad summam corporum *S*+*P*. Nam ex demonstratis apparet, tempora, quibus arcus similes describuntur, esse in ratione subduplicata distantiarum *C P* & *s p*, sive *C P* + *S C*, hoc est, in ratione subduplicata corporis *S* ad corpora *P* + *S*; ergo componendo, tempora, quibus totas peripherias similes absolvunt, sunt in eadem ratione.

Propositio XX. Si corpora duo *S* & *P*, viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahentia, revolvantur circa gravitatis centrum commune; ellipsium, quas corpus utrumque *P* & *S*, hoc motu circa centrum commune *C* describit, axes transversi erunt ad axem transversum ellipseos, quam corpus idem *P* circa alterum quiescens eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum *S* + *P* ad primam duarum medie proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum *S*. Nam si ellipsis, quam corpus *P* describit circa alterum corpus *S* immobile, esset æqualis duabus ellipsibus simul sumtis, quas utrumque corpus *P* & *S* circum centrum commune *C* mobile designat; tempora periodica, per *Coroll.* 2. *Prop.* præced. forent in subduplicata ratione corporis *S* ad summam corporum *S* + *P*. Minuatur in hac ratione

tempus

tempus periodicum in ellipsi illa, & tempora periodica evadent æqualia. Ellipseos autem axis transversus, per *Prop.* 15. *Coroll.* 1. minuetur in ratione, cujus hæc subduplicata est sesquiplicata, hoc est, in ratione, cujus ratio integra S ad $S + P$ est triplicata, sive in ratione, cujus triplicata æquatur rationi S ad $S + P$. Ideoque ad axem transversum ellipseos prioris, qui æquatur duobus axibus transversis corporum S & P circa centrum gravitatis commune C gyrantium simul sumtis, ut prima duarum medie proportionalium inter $S + P$ & S ad $S + P$. Et vice versa, axes transversi ellipsium circa centrum C descriptarum erunt ad axem principalem ellipseos à corpore P circa alterum S immobile descriptæ, ut $S + P$ ad primum duorum medie proportionalium inter $S + P$ & S.

Ut hæc demonstratio melius capiatur, ponatur $S = a$, & $S + P = b$; & erit tempus periodicum corporis P circa corpus mobile S ad tempus periodicum ejusdem corporis P circa corpus S immotum (si ellipsis descripta a corpore P circa corpus S immobile æqualis est ellipsibus simul sumtis, quas corpora P & S circa centrum C describunt) ut $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{a}$. Minuatur $\sqrt{b}$ in eadem ratione, & fiet $\sqrt{a}$; igitur tempora periodica utrinque evadunt æqualia. Sit ratio, in qua axis ellipsis diminuitur, ut b ad d; & erit, per *Prop.* 15. *Coroll.* 1. $b \sqrt{b}$, ad $d \sqrt{d}$, ut $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{a}$; ergo b ad *b* ad *a* ut b^3 ad d^3, hoc est ratio $S + P$ ad S est triplicata rationis, in qua axis transversus ellipsis diminuitur. Sint *b. d. e. a.* in continua proportione; & erit *b* ad *a* ut b^3 ad d^3: ergo axis prioris ellipsis est ad axin posterioris ut $S + P = b$, ad primam duarum mediæ proportionalium inter *b* & *a*, sive $S + P$ & S.

Coroll. Quare corporis alicujus gyrantis circa aliud immobile distantia mediocris, quæ est semissis axis transversi, est ad distantiam mediocrem corporum duorum, circa centrum commune gyrantium, in eadem ratione.

Prop. XXI. Corpora plura sese invicem trahentia viribus, quæ crescunt in simplici ratione distantiarum a centris gravitatis eorum respectivis, moveri possunt in variis ellipsibus circa hæc centra, ita ut motus hic sine perturbatione perseveret, & ut commune omnium gravitatis centrum interea quiescat. (Fig. 25.) Ponantur primum corpora duo *T* & *L*, commune habentia gravitatis centrum *D*, secundum legem suppositam sese invicem trahentia, quodlibet vi aliqua distantiæ suæ a centro *D* proportionali semel impressa, in lineis parallelis motu æquabili ad partes contrarias tendere; describent corpora ista ellipses similes, quarum centra cum gravitatis centro concurrent, per *Coroll.* 1. *Prop.* 18.

Trahat jam corpus tertium *S* priora duo *T* & *L* viribus acceleratricibus *S T*, *S L* & ab ipsis vicissim trahatur: vis *S T* per *Coroll. L.* 4. re-

solvi

ſolvi poteſt in vires *S D*, *D T*; & vis *S L* in vires *S D*, *D L*. Vires autem *D T*, *D L*, quæ ſunt ut ipſarum ſumma *T L*, atque ideo ut vires acceleratices, quibus corpora *T* & *L*, ſe mutuo trahunt, additæ his viribus corporum *T* & *L*, prior priori, & poſterior poſteriori, componunt vires diſtantiis *D T* ac *D L* proportionales, ut prius, ſed viribus prioribus majores; ideoque efficiunt, ut corpora illa deſcribant ellipſes ut prius, ſed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices corporibus *T* & *L* proportionales, trahendo corpora illa æqualiter & ſecundum lineas *T I*, *L K*, ipſi *D S* parallelas, nihil mutant ſitus eorum ad invicem, ſed faciunt ut ipſa æqualiter accedant ad lineam *I K*, ductam per *S* ad *D S* perpendicularem. Impedietur autem iſte ad lineam *I K* acceſſus, ſi ſyſtemati corporum *T* & *L* ab una & corporis *S* ab altera parte vis alia imprimatur, qua in contrarias partes motu æquabili & parallelo tendunt, ita ut velocitas illius, ſit ad velocitatem hujus, ut *C D* ad *C S*; gyrabuntur enim ita circa commune centrum gravitatis *C*, & deſcribet centrum corporis *S* æque ac centrum *D* ſyſtematis corporum *T* & *L* ellipſes ſimiles & concentricas, interea dum corpora *T* & *L* viribus acceleratricibus æqualiter & ſecundum lineas parallelas *T I*, *L K*, ut dictum, attracta pergent per *L L*. 7 & 8. circa centrum mobile ellipſes ſuas deſcribere, ut prius.

Ad-

Addatur jam corpus quartum *U*, & simili argumento concludetur, hoc & punctum *C* ellipses circa omnium commune centrum gravitatis *B* describere; manentibus motibus priorum corporum *T*, *L* & *S* circa centra *D* & *C*, sed acceleratis.

Hæc ita se habent, etsi corpora *T* & *L* trahant se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus, quam quibus trahunt corpora reliqua in distantiis æqualibus, sintque vires hæ inter se in ratione composita ex ratione distantiarum & corporum se mutuo trahentium.

Prop. XXII. Quodsi vires, quibus corpora se mutuo trahunt, sunt in ratione distantiarum duplicata reciproce; corpora circa commune gravitatis centrum gyrantia describunt ellipses, quarum focus alteruter cum centro gravitatis communi coincidit, per *Prop.* 18. *Cor.* 1.

Cas. 1. Quodsi ergo unum eorum reliqua tantum magnitudine superat, ut ejus centrum a gravitatis centro communi totius corporum systematis non longe distet; reliqua corpora minora circa maximum hoc describent ellipses, quarum focus centro corporis maximi erit quam proximus, nisi quatenus errores inducuntur per actiones minorum corporum in se mutuo.

Cas. 2. Fingatur jam systema corporum modo descriptum, aliudve quodvis, duorum circa centrum commune gravitatis revolventium, progredi uniformiter in directum, & interea vi cor-

poris

poris alterius longe maximi, & ad ingentem distantiam siti, ad latus urgeri, ita ut rectarum (Fig. 27.) *S P*, *S T*, ex centro corporis maximi *S* in corpora *P* & *T* ductarum differentia sit perexigua, aut angulus inclinationis *P S T* evanescens, ideoque vires acceleratrices corporum *P* & *T* sint fere æquales, & directiones earum inter se parallelæ; perseverabunt motus partium systematis *P* & *T* inter se sine errore aut perturbatione perceptibili interea dum hoc systema circa corpus maximum *S* revolvitur; quoniam per *L.* 8. viribus æqualibus & secundum lineas parallelas urgentibus motus corporum *P* & *T* nullatenus mutatur.

Coroll. 1. Quo propius autem corpus illud maximum accedit ad systema duorum vel plurium, eo magis turbantur motus partium systematis inter se, propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque rationis inæqualitas.

Coroll. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo, quod attractiones acceleratrices corporum systematis *P* & *T* ad corpus maximum *S* in iisdem distantiis sint inæquales. Hæc enim inæqualitas priori addita majorem reddet perturbationem.

Prop. XXIII. Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum, se mutuo trahant; & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se re-

reciproce ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur; dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis describet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam ellipseos, umbilicum in concursu radiorum habentis, magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitur, quam si non attractum quiescat. Sit corpus maximum *T*, minora *P* & *S* (Fig. 26.) circa maximum *T* revolventia: sit orbita *P A B*, in qua corpus *P* movetur circa *T*, ellipsis, & umbilicus ejus in centro corporis *T*. Quodsi per attractionem corporis *S*, corpora *P* & *T* æqualiter traherentur versus *S*; corpus *P* pergeret describere ellipsin circa corpus *T*, & areæ temporibus proportionales manerent, ut prius. Sed si corpus *P* circa conjunctionem *A*, ob minorem distantiam ab *S*, magis attrahitur ad *S*, quam corpus *T*, & circa oppositionem *B* corpus *T* magis attrahitur versus *S*, quam corpus *P*; figura orbitæ elliptica mutabitur, & areæ temporibus non erunt omnino proportionales. Mutabitur autem orbitæ ellipsis quam maxime, & areæ a temporum proportione maxime recedent, ubi corpus *T* non omnino attractum quiescat, & corpus *P* solum actione corporis *S* cieatur.

Prop. XXIV. Positis iisdem attractionum legibus, dico corpus exterius *S*, circa interiorum *P*, *T*, commune gravitatis centrum *O*, radiis ad centrum illud ductis, describere areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam ellipseos, umbelicum in centro eodem habentis, magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum *T*, radiis ad ipsum ductis describere potest. Distent corpora *T* & *P* (Fig. 28.) æqualiter a corpore *S*, & fiat *Sx* æqualis *TO*, & *Sy* æqualis *PO*, compleaturque rectangulum *Sxuy* & ducatur diagonalis *Su*. Secundum hanc diagonalem attractio corporis *S* versus corpora *P* & *T* conjunctim dirigitur, ideoque versus centrum commune gravitatis *O*. In cæteris casibus, ubi attractio corporis *P* ob minorem aut majorem distantiam a corpore *S* augetur aut diminuitur, hæc directio aliquantulum a centro gravitatis *O* versus *P*, vel versus *T*, recedit, sed tamen semper centro communi gravitatis *O* propius accedit, quam corpori *T*.

Definitiones. Sit *S* sol, *T* Planeta primarius, qualis est terra, (Fig. 27.) *P* Planeta secundarius sive satelles, qualis est luna. Sit porro *ETE* orbis primarii annuus circa solem, *ACBD* orbita secundarii menstrua. Concipiatur ad planum, in quo figura hæc est delineata, aliud planum perpendiculare per *S* & *T* transiens, quod linea *SATB* repræsentat; sicubi satelles in orbita sua gyrans in hoc planum incidit, in Syzigia esse dicitur; & quidem si satelles est inter solem & primarium in loco *A*, in conjunctione; sin primarius inter solem & secundarium, in loco *B* commorantem, est

con-

constitutus, idem secundarius in oppositione cum sole esse dicitur. Si satelles a plano *B* nonaginta gradus in locis *C* & *D* versatur, in quadraturis; denique in locis inter quadraturas & Syzigias intermediis, v. g. in *P* & *p*, in octantibus esse dicitur.

Prop. XXV. Supposita vi acceleratrice decrescente in ratione distantiarum accrescentium, si Planeta primarius *T* solem *S* circumambiens secum deferat satellitem *P*; hic circa primarium ita movebitur, ut a quadraturis *D* vel *C* ad cunjunctionem *A* vel oppositionem *B* motus ejus perpetuo acceleretur; a Syzigiis vero *A* & *B* ad quadraturas *C* & *D* retardetur: adeoque erit prope Syzigias velocissimus, prope quadraturas autem tardissimus. Orbita etiam ejus per attractionem ad solem *S* (si supponatur per solam attractionem ad primarium *T* describere circulum, sive ellipsin, circa commune cum primario centrum gravitatis, aut circa ipsum primarium in foco ellipsis constitutum) valde mutabitur, nec areas temporibus proportionales, ut antea, describere perget.

Ducatur ex *S* per *P* recta *S P L*, & fiant *P S*, *K S*, *R S* & *L S*, continuo proportionales; & erit *L S* ad *K S* in ratione duplicata *K S* ad *P S*. Quod si igitur *K S* exprimit vim acceleratricem Planetæ secundarii mediocrem, quam habet in loco prope quadraturam, & propter eandem fere primarii a sole distantiam cum primario communem; erit *L S* vis ejus acceleratrix in loco *P*.

Hæc vis *L S* quoniam major est vi *T S*, qua Planeta primarius trahitur ad solem *S*, motus ejus a quadratura *D* ad conjunctionem *A*, quoniam cum hac vi in eandem partem tendit, accelerabitur; sed a conjunctione *A* ad quadraturam *C*, quoniam in adversam partem dirigitur, motus ejus retardabitur. Et quoniam vis acceleratrix versus solem *S* in descensu satellitis à *D* ad *A* semper accrescit, & in eum constanter agit; erit velocitas ejus in loco *A* maxima, a quo loco ascendendo ad *C* motus ejus per actionem vis hujus contrariam decrescere incipit.

Ubi Satelles versatur in superiore parte orbitæ suæ, vis ejus acceleratrix versus solem minor est, quam Planetæ primarii; igitur hac vi primarius Planeta magis ad solem urgetur, quam Satelles: quare motus hujus spectatori in primario constituto accelerari apparebit, dum satelles a quadratura *C* tendit ad oppositionem *B*. Supponamus enim *T* (Fig. 29.) fortius attrahi ad solem, quam *P*, per spatium *Tt*, & ducantur ex *T* & *t* per *P* rectæ *TPd* & *tPe*, occurrentes orbitæ fixarum in *d* & *e*; erit *e* locus, in quo idem *P* ex *t* spectabitur intra stellas fixas. Igitur motus satellitis *P* per spatium *d e* accelerari apparebit spectatori in Planeta primario moto ex loco *T* in locum *t*. Et hæc acceleratio motus *P* apparens, ob differentiam virium attrahentium ipsorum *P* & *T* ad solem continuo accrescentem, semper augebitur in ascensu satellitis a *C* ad *B*,

erit-

eritque maxima in puncto supremo B; a quo descendendo ad D, propter differentiam virium acceleratricum P & T versus solem continuo decrescentem, acceleratio motus P apparens semper decrescit, donec in D prorsus evanescat, ubi vires acceleratrices modo dictæ sunt inter se æquales.

Supponamus satellitem sola attractione in Planetam primarium describere peripheriam circuli, ubi accesserit vis acceleratrix in solem fortius illum quam hunc urgens, satelles P longius a primario T removebitur; quare vis centripeta in T diminuetur, & ipse satelles P in orbita largiori & minus curva feretur. Idem etiam eveniet, sicubi satelles P in superiori orbitæ parte versetur, & Planeta primarius T magis ad solem quam satelles attrahatur.

Ducatur ex P in T recta $P\,T$, & ex L huic parallela $L\,M$, (Fig. 27,) occurrens rectæ $S\,B$ in M; & erit vis $L\,S$ divisa in vires $L\,M$ & $M\,S$. Auferatur a posteriori vis $T\,S$, quæ satelliti cum Planeta primario est communis, & remanebunt vires $M\,T$ & $L\,M$, quarum hæc est semper in directione $P\,T$ versus centrum T, ideoque nullatenus impedit, quo minus Planeta P areas temporibus proportionales, ut antea, cum sola vi centripeta in primarium T urgebatur, describere pergat, per *Prop.* 4. Altera vero vis MT, quæ satellitem a centro T detrahit, eumque in directione cum recta $M\,S$ parallela urget, & quæ semper augetur, quo propius satelles perveniat ad conjunctionem, efficiet ut satelles temporibus æqualibus areas inæquales describat. Quod etiam verum est, ubi satelles *P* in superiori partæ orbitæ suæ versatur. Supponamus enim satellitem esse in *p*, & vim ejus acceleratricem in solem proportionalem rectæ *l S*; ducanturque *p T*, *l m*, inter se parallelæ, vis *l S* dividetur in vires *l m* & *m S*, quarum illa nullam in proportione arearum ad tempora mutationem inducit; altera vero *m S*, quoniam minor est, quam vis *T S*, qua Planeta primarius afficitur, defectus *T m* eandem in arearum descriptione æquabili mutationem producet, ac in inferiore orbitæ parte excessus *M T* producebat. Etenim cum satelles a quadratura *C* ad oppositionem *B* procedat, areæ in majori accrescent ratione quam tempora, & decrescent, ubi ab oppositione tendat ad quadraturam *D*.

Coroll. 1. Orbita satellitis *P* cæteris paribus curvior est in quadraturis, quam in conjunctione & oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite, manente eadem vi centripeta. Et præterea vis *M T* in conjunctione, vel *m T* in oppositione, contraria est vi centripetæ, qua satelles *P* trahitur ad *T*; ideoque vim illam minuit: quare corpus *P* minus adhuc in conjunctione & oppositione a tramite recto deflectet, quam in quadraturis, ubi hæc vis evanascit, & vis centripeta per vim *L M* augetur.

Coroll.

Coroll. 2. Supposito ergo, quod satelles *P* circa *T* sola vi centripeta describat orbitam circularem; accedente vi hac nova describet figuram ovalem, & longius recedet a Planeta primario *T* in quadraturis, quam in Syzigiis. Ubi vero orbita prior satellitis sit elliptica circa *T* ejus umbilicum, ipsiusque ellipsis absides sint in Syzigiis; eccentricitas ejus vi nova accedente augebitur. Indeque fieri potest, ut satelles *P* ad absidem summam appellans absit longius a a corpore *T* in Syzigia, quam in quadraturis.

Coroll. 3. Orbita satellitis magis magisque dilatatur, quo propius satelles una cum Planeta primario ad solem accedit; & rursus paulatim contrahitur, cum a sole recedit. Nam actio solis in utrumque Planetam augetur in accessu ad solem in ratione duplicata distantiarum a sole reciproca; quare differentia virium acceleratricum in solem, quæ causa est dilatationis orbitæ, major est in distantia minori a sole, quam in majori; dilatatur ergo orbita in accessu ejus cum primario ad solem. V. g. sit major distantia primarii a sole 6, & secundarii in conjunctione 5. Sit minor distantia primarii a sole 4, & erit satellitis distantia a sole in conjunctione (si distantia ejus a Planeta primario manet ut prius) 3. Erit igitur in minori distantia actio solis in primarium ad actionem ejus in satellitem ut 36 ad 25; Et in majori distantia ut 16 ad 9; in utraque ratione partes unius denominationis, nempe trigesimas sextas intelligimus. Sed differentia inter 36 & 25 major est, quam inter 16 & 9; illa enim est 11 hæc 7. Quare satelles in minore distantia a sole magis a primario discedit, quam in majore.

Coroll. 4. Tempus periodicum satellitis circa Planetam primarium longius est in distantia primárii a sole minori, & brevius in majori. Quare motus Lunæ medius in perihelio tardior, in aphelio vero velocior est. Si enim satelles cum Planeta primario a sole non attraheretur; in omnibus distantiis a sole radius orbitæ ejus, tempus periodicum, & vis centripeta in primarium, semper manerent eadem. Supponatur jam, orbitam hanc satellitis in diversis distantiis a sole dilatari, minus in majori & magis in minori; erunt tempora periodica in ratione radiorum auctorum sesquiplicata per *Coroll.* 4. *Prop.* 8. Supponatur jam, orbitam in majori distantia a sole dilatatam constitui in minori a sole distantia; magis adhuc orbita dilatabitur, tempusq; periodicum augebitur.

Prop. XXVI. Si Satelles describat orbitam ellipticam circa Planetam primarium in ellipseos foco positum; per actionem solis ellipsis hæc varie mutabitur, & ellipsis hujus mutabilis axis seu absidum linea non eandem semper directionem servabit, sed quasi circa axem rotabitur; ideoque modo in antecedentia, modo in consequentia, signa dirigetur; & quoniam motus

in

in consequentia major est, in quavis periodo satellitis axis in consequentia feretur.

Sit Planeta primarius *T* satelles *P* & sol *S*. (Fig. 30.) Sit *T*, *T*, *T*, orbis in quo primarius movetur una cum satellite circa solem *S*, & *P C*, *P C*, *P C*, orbita satellitis elliptica circa primarium *T* in diversis locis orbis magni. Si satelles eadem vi, qua primarius, ad solem traheretur, directiones axis *Ta*, *Tb*, *Tc*, in diversis locis 1, 2, 3, essent inter se parallelæ, & ob ingentem fixarum distantiam fere ad eundem inter stellas fixas locum respicerent, ita ut differentia locorum maxima 10 minuta secunda non excederet. Sit distantia satellitis a Planeta primario major 6, & minor 5; erit vis centripeta satellitis in distantia majori ad vim centripetam in minori ut 25 ad 36. Sed vis hæc per actionem solis diminuitur in ratione distantiarum circiter, hoc est, in ratione 6 ad 5; & si hi numeri partes trigesimæ sextæ supponantur, erit ratio virium diminutarum ut 25 — 6 ad 36 — 5; hoc est, ut 19 ad 31. Quæ ratio major est, quam ratio 25 ad 36. Quoniam igitur vires centripetæ sunt in majori ratione, quam duplicata distantiarum reciproce, (quæ ratio requiritur, ut circa primarium describat satelles ellipsin) nec tamen est in ratione triplicata distantiarum reciproce, (quæ requiritur, ut describat spiralem æquiangulam circa polum *T*, per *Prop.* 12.) Movebitur ergo in curva inter ellipsin hanc & spiralem æquiangulam intermedia. Hanc

radius

radius ubique in eodem angulo obliquo secat, per definit. spiral. §. 99. Geom. nec unquam angulus hic obliquus in rectum mutatur, sicut accidit in ellipsi, ubi radius in locum axis pervenit. Quare in curva intermedia major motus angularis requiritur, donec radius curvam illam in angulo recto secet. Rotatur ergo axis in Syzigiis in consequentia. V. g. Sit *P A B* ellipsis (Fig. 31.) quam satelles *P* describit circa primarium *T* in foco ejus constitutum sola vi centripeta in *T*. Et sit satelles *P* in oppositione in puncto *P*. Ducatur *P* α π spiralis æquiangula, cujus polus est in *T*, & alia curva ovalis *P a p* inter ellipsin & Spiralem intermedia. Ducantur etiam ex puncto *T* radii *T P*, *T* α, *T* π, quorum medius *T* α coincidit cum axi ellipseos. Concipiatur, radium *P T* omnes tres curvas in angulo quocunque obliquo secare; & evidens est, dum radius *P T* gyratur circa *T* versus *A*, angulum hunc obliquum continuo mutari, donec in absιde *A* in rectum convertatur. Sed idem radius *T A* spiralem æquiangulam in eodem angulo obliquo secat, ac radius *T P*; quare in curva *P a p* angulus hic obliquus tardius mutatur quam in ellipsi, nec transit in rectum prius, quam radius *T P* pervenit in locum *T p*. Est ergo *T p* linea absidum ovalis *P a p*. Igitur linea absidum *T A* in consequentia movetur.

Si

Si vero Satelles *P* moratur in quadraturis; vis solis in eundem, quæ exprimitur per *LM* (Fig. 27.) conspirat cum vi centripeta in Planetam primarium. Illa est semper in ratione radiorum directe, hæc vero in ratione radiorum duplicata inverse: ergo ratio ex duabus his composita minor est, quam ratio radiorum duplicata inverse. Quare satelles hac vi composita curviorem lineam, quam ellipsin priorem, describit, angulusque obliquus in hac curva citius in rectum mutatur, hoc est, linea absidum movetur in antecedentia. V. g. Sit satelles gyrans in ellipsi (Fig. 32.) *PAB*, & sint quadraturæ *P* & *C*; erit vis centripeta satellitis in *P* ad vim centripetam ejus in *C*, ut quadratum *TC* ad quadratum *TP*, hoc est, si *PT* est 6, & *TC* 5, ut 25 ad 36; sed vis acceleratrix in *P* est ad vim acceleratricem in *C* ut 6 ad 5. Si ergo hi numeri partes trigesimæ sextæ esse supponantur; erit vis centripeta aucta in minori distantia ad illam in minori, ut 25+6 ad 36+5, sive ut 31 ad 41, quæ ratio minor est, quam ratio 25 ad 36. Ergo movetur Planeta in curviori, quam est ellipsis *PAB*. Sit ista *Ppa*; & angulus obliquus, in quo radius *TP* eandem secat, citius in rectum mutabitur, nempe ubi radius est in loco *Tp*. Quare linea absidum ex loco *AB* in locum *Tp* regreditur, sive in antecedentia movetur.

In

In locis inter Syzigias & quadraturas pendet motus augis ex causa utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa, vel regrediatur. Unde cum vis *K L* in Syzigiis (Fig. 37.) sit quasi duplo major, quam vis *LM* in quadraturis, transferetur aux ulterius in consequentia quam in antecedentia, hoc est, in tota revolutione satellitis progredietur semper in consequentia.

Coroll. 1. Ubi absides ellipsis sunt circa satellitis Syzigias, aux ejusdem celerrime progreditur, cum satelles est in Syzigiis; & tardissime regreditur, ubi satelles moratur in quadraturis: tum enim vis ablatitia *K L* sive *M T* in Syzigiis est maxima, & vis *P T* in quadraturis centripetæ addenda est minima. Contrarium accidit ubi absides circa quadraturas ponantur.

Coroll. 2. Ex eadem ratione manifestum est, eccentricitatem orbitæ ovalis satellitis *P* continuo mutari. Etenim ubi satelles est in quadratura *P* (Fig. 32.) prope absidem superiorem *A*, vis ejus centripeta est ad vim centripetam in quadratura opposita *C* in minori, quam duplicata ratione *TC* ad *TP*; quare satelles infra absidem superiorem *A*, & in quadratura *C* supra absidem *B* movetur. Quare orbita satellitis magis circularis evadit & eccentricitas ejus diminuitur. E contrario si absides sunt circa Syzigias & satelles est in oppositione penes absidem superiorem *A*, (Fig. 31.) vis centripeta

in

in *P* eſt ad vim centripetam in loco oppoſito *C* in majori, quam duplicata ratione diſtantiæ *TC* ad *TP*; quare ſatelles ſupra abſidem ſuperiorem *A* aſcendit, & infra inferiorem *B* deſcendit. Igitur orbita ejus evadit magis elliptica, & eccentricitas augetur. Ergo cum abſis movetur a quadraturis ad ſyzigias, eccentricitas accreſcit, & a ſyzigiis ad quadraturas decreſcit.

Definitio. Eccentricitas eſt diſtantia foci a centro ellipſeos, applicata ad ſemiaxem majorem, qui ſive magnus ſive parvus ſit ab Aſtronomis in 1.000000 partes dividitur.

Prop. XXVII. Si planum orbitæ ſatellitis eſt inclinatum ad planum orbis magni, in quo planeta primarius gyratur circa ſolem; angulus inclinationis illius ad hoc planum variis modis mutatur pro diverſa nodorum & ſatellitis poſitione ad ſolem, & in quavis revolutione nodi regrediuntur in antecedentia. Nimirum ubi nodi ſunt in ſyzigiis, angulus inclinationis eſt maximus, & nodi quieſcunt; ubi vero nodi ſunt in quadraturis, angulus inclinationis continuo minuitur, dum ſatelles progreditur a quadraturis ad ſyzigias, & minimus eſt, ubi ſatelles eſt in ſyzigiis, nodique in eadem proportione regrediuntur. Denique ubi nodi ſunt inter ſyzigias & quadraturas circa octantes, angulus inclinationis minus decreſcit, & nodi tardius regrediuntur.

Sit

Sit *T T T* orbis magnus (Fig. 30.) & *S* sol in eodem plano. Sit *N P D C* orbita satellitis, cujus planum concipiatur planum orbis magni secare in linea *N T D*, ita ut una pars orbis *N C D* supra planum orbis magni elevatum, & altera *N P D* infra illud depressum sit; hæc ipsa *N T D* linea nodorum est. Nam nodi dicuntur puncta *N* & *D* in quibus orbita *N P D C* secat planum orbis magni. Concipiatur jam, orbitam *N P D C* una cum planeta primario moveri per orbem magnum; & certum est lineam *N T D* in omnibus locis eandem semper directionem servare, hoc est, propter ingentem fixarum distantiam ad eundem semper locum inter fixas respicere, & orbitam *N P D* eandem semper inclinationem retinere, nisi solis vis motum satellitis turbet.

Casus 1. Sint nodi in syzigiis in *n* & *d*, quoniam *S* in communi sectione utriusque plani, orbis magni æque ac orbitæ satellitis, positus est; vis solis in directione utriusque plani est, ideoque nec in positione lineæ nodorum, nec in inclinatione orbitæ, ullam inferre mutationem potest.

Casus 2. Sint nodi *N* & *D* in quadraturis & ascendat satelles supra planum orbis magni versus *C*, quoniam satelles de orbita sua magis magisque detrahitur versus solem, angulus inclinationis orbitæ continuo mutatur, fitque minimus, ubi satelles est in syzigia *C*.

Sit

Sit inclinatio orbitæ *P T S*, (Fig. 33.) & satelles ascendens in *P*. Ducatur *P S*, quæ est directio vis solis in satellitem *P*. Supponatur, satellitem *P* hac vi de orbita detrahi in *p*, & ducatur *p T*; erit *p T S* angulus inclinationis mutatæ, qui minor est angulo priori *P T S*. Aut ut Autorem sequamur, ducatur *p u* parallela rectæ *S T*; & erit vis *P p* divisa in *P u* & *u p*, quarum prior in directione orbitæ est, ideoque nullam inclinationis mutationem infert; altera vero *u p* satellitem a plano orbitæ detrahens omnis mutationis causa est. Idem etiam verum est, ubi satelles est in inferiori orbitæ parte in *L*. Nam quoniam planeta primarius *T* magis versus solem tunc attrahitur, quam satelles; hic ex *L* in *l* recedere videtur, angulusque inclinationis ut antea diminuitur. Quoniam ergo angulus inclinationis hoc casu semper diminuitur satelles citius per planum orbis magni transit ipsaque linea nodorum in antecedentia movetur. Ut ex figura 34. magis conspicuum est, ubi *DPN* est orbita prior, *N T D* linea nodorum ejusdem orbitæ, *D p O* orbita posterior, ejusque linea nodorum *O T I*.

Casus 3. Si nodi sunt in octantibus in *v* & *δ* (Fig. 35.) & satelles ascendit supra planum orbis magni in *δ*; nodi ob rationem modo dictam regrediuntur, donec satelles pervenit ad quadraturam *Q*, ita ut linea nodorum ex loco *v δ* moveatur in locum *o i*; at vero antequam

tequam satelles ad nodum *o* perveniat, & dum a quadratura ad nodum tendit, planeta primarius fortius ad solem, quam satelles, attrahitur, ideoque ex loco *T* in locum *t* movetur; igitur nodus *o* interea temporis inter stellas fixas ex loco *r* in *s*, hoc est, in consequentia moveri spectatori in planeta primario apparet. Eodem modo, ubi nodi sunt in octantibus *L* & *M*, & ubi satelles ascendit supra planum orbis magni in *M*, & progreditur ad quadraturam *q*, planeta primarius ex loco *t* regreditur in *T*; quare nodus *M* in consequentia progredi videtur. At ubi satelles a quadratura *q* progreditur, ab orbe suo continuo detrahitur; quare nodi ex *L* & *M* in *l* & *m* regrediuntur. Quoniam ergo nodi magis regrediuntur, quam progrediuntur, in quavis revolutione movebuntur in antecedentia, licet tardius, quam in casu secundo. Inclinatio etiam minus diminuitur, quam si nodi sunt in quadraturis, quoniam orbita ita ad solem sita est, ut satelles magnam partem oblique tantum a sole de orbita sua trahatur; imo quando satelles a nodo ascendente ☊ pervenit ad octantem circa *L* vis centripeta versus *T* angulusque inclinationis augescit, donec satelles perveniat ad quadraturam in *Q*.

Coroll. Omnes inæqualitates in motu satellitis paulo majores sunt in conjunctione satellitis cum sole, quam in ejus oppositione.

Sit

Sit enim BT (Fig. 27.) æqualis TA; & erit TS ad AS in majori ratione quam BS ad TS; quare duplicata illius major adhuc erit duplicata hujus; igitur differentia MT major differentia mT & LM major ml. Sed ubi radius orbitæ ſatellitis eſt reſpectu diſtantiæ ſolis perexiguus, hæc differentia minor eſt, quam ut obſervari poſſit.

Lemma 9. Eſto TS ad PS (Fig. 36.) ut tS ad pS; dico differentiam quadratorum TS & PS eſſe ad differentiam quadratorum tS & pS, ut quadratum TS ad quadratum tS. Quoniam per hypotheſin eſt $TS. PS :: tS. pS$; ergo & quad. TS. quad. $PS ::$ quad. tS. quad. pS. & dividendo quad. TS. quad TS — quad. $PS ::$ quad. tS. quad tS — quad. pS. ac tranſponendo quad. TS. quad. $tS ::$ quad. TS — quad. PS. quad. tS — quad. pS.

Lemma 10. Fiat tq æqualis TP; dico differentiam quadratorum tS & pS eſſe ad differentiam quadratorum tS & qS ut tS ad TS quam proxime, ſi TP reſpectu TS eſt perexigua. Sit enim $TS = a$, $TP = tq = b$. $tS = d$; erit $tp = \frac{bd}{a}$, $pS = d - \frac{bd}{a}$, $qS = d - b$. Ergo differentia quadratorum tS & pS ad differentiam quadratorum tS & qS, ut $\frac{2bdd}{a} - \frac{bbdd}{}$ ad $2bd - bb$, hoc eſt, ut $2add - b$

$- bdd$ ad $2aad - aab$, ſive ut $2a - b$ ad $2d - b$, & ut dd ad aa. Sed quoniam b eſt perexiqua $2a - b$, eſt ad $2d - b$, ut $2a$ ad $2d$, quam proxime; quare & $2add - bdd$, ad $2aad - aab$, ut $2add$ ad $2aad$, ſive ut d ad a quamproxime.

Prop. XXVIII. Vires ſolis perturbatrices earumque effectus in diverſis a ſole diſtantiis ſunt in diſtantiarum ratione triplicata reciproce quam proxime, ſi radius orbitæ ſatellitis ad diſtantiam ſolis eſt perexiguus. Quodſi enim radius orbitæ ſatellitis diminuitur in eadem ratione, ac ipſa diſtantia a ſole; vires ſolis perturbatrices ſunt in ratione diſtantiarum a ſole duplicata reciproce, per *Lemma* 9. Sunt enim ut differentia quadratorum TS & PS ad differentiam quadratorum tS & pS, & hæ differentiæ ſunt in ratione duplicata diſtantiarum TS & tS reciproce, hoc eſt, ut ts quad. ad TS quad. Sed ſi radius TP in omnibus diſtantiis a ſole manet idem; ratio hæc duplicata reciproce augenda eſt alia ratione, quæ eſt ut differentia virium in diſtantiis pS & tS ad differentiam virium in diſtantiis qS & tS, ſive ut differentia quadratorum tS & pS ad differentiam quadratorum tS & qS, hoc eſt per *Lem.* 10. ut tS ad TS circiter. Quæ duæ rationes conjunctim æquantur rationi diſtantiarum planetæ primarii a ſole triplicatæ reciprocæ quam proxime. V. g. Si radius orbitæ lunaris ponitur 1. erit diſtantia terræ a ſole maxima 373, & minima 360 circiter. Diſtantia

stantia lunæ a sole maxima in conjunctione 372, & minima 359. Quæratur per regulam auream ad 373, 372, & 360 quarta proportionalis 359 $\frac{1}{29}$ circiter. Hæc ipsa foret distantia lunæ a sole minima si orbita lunæ eadem, ratione decresceret ac distantia terræ a sole, & hoc casu ratio virium perturbatricum foret ut 360 quad. ad 373 quad. Sed est differentia virium in distantiis 360 & $359\frac{1}{29}$ = 129600 — 128905 = 695, & in distantiis 360 & 359 = 129600 — 128881 = 719. Est ergo differentia illa ad hanc, ut 695, ad 719, quæ ratio est fere æqualis rationi 360 ad 373, hoc est rationi distantiarum reciproce. Addatur hæc rationi distantiarum duplicatæ reciproce; & erit tota ratio virium motus satellitis perturbatricum triplicata distantiarum reciproce, hoc est, ut 360 cubus ad 373 cubum.

Cor. 1. Vires hæ in diversis a sole distantiis sunt etiam directe, ut cubi diametrorum apparentium solis ex planeta primario *T* spectati, quam proxime. Nam diametri apparentes corporis longinqui sunt in ratione reciproca distantiarum circiter. Diameter enim apparens mensuratur angulo, sub quo videtur. Sic diameter apparens *A B* in loco *C* (Fig. 37.) est ad eandem diametrum apparentem in *D*, ut angulus *B C A* ad angulum *B D A*. Est vero angulus *B C A* ad angulum *B D A*, ut radius *B D* ad radium *B C*, hoc est, ubi radii *B C* & *B D* distantiis *E C* & *E D* tantum non sunt æquales, ut distantia $E\,D$ ad distantiam $E\,C$ quam proxime.

Coroll. 2. Hinc, & ex *Coroll. Prop.* 1. sequitur quod errores motus satellitis lineares $B\,D$ (Fig. 12.) & $b\,d$ in diversis primarii a sole distantiis sint, ut vires solis perturbatrices & quadrata temporum satellitis periodicorum conjunctim, hoc est, in ratione distantiarum primarii a sole triplicata inverse & ratione duplicata temporum periodicorum satellitis circa primarium directe. Et quoniam vires dictæ sunt cæteris paribus ut radii orbitæ lunaris, in qualibet revolutione satellitis motus angulares BOD & bOd e centro primarii O spectati erunt in duplicata ratione temporum periodicorum. Diminuitur enim angulus in ratione radii augescentis. Et quoniam cubi distantiarum planetarum primariorum a sole sunt ut quadrata temporum periodicorum, per *Coroll.* 4. *Prop.* 8. errores angulares satellitum diversorum planetarum sunt inter se in ratione temporum periodicorum satellitum circa planetas suos primarios duplicata directe, & ratione duplicata temporum periodicorum planetarum primariorum circa solem inverse. Et inde motus medii absidum diversorum satellitum sunt in data ratione ad motum nodorum, & utrique sunt in ratione simplici temporum periodicorum satellitum circa primarios suos directe & ratione temporum periodicorum planetarum primariorum circa solem duplicata inverse. Nam in motu absidum & nodorum

cessat

cessat differentia radiorum & velocitatum satellitum, quæ in motu angulari satellitum obtinet; igitur ratio radiorum & velocitatum satellitum a ratione motus angularis est deducenda, utraque autem simul sumta æquatur rationi radiorum sesquiplicatæ, sive temporum periodicorum simplici, per *Coroll.* 4. *Prop.* 8.

Coroll. 3. Concipiatur loco satellitis *P* (Fig. 27.) annulus fluidus, rotundus & Planetæ primario *T* concentricus; & singulæ annuli partes motus suos omnes ad legem corporis *P* peragendo propius accedent ad Planetam *T*, & celerius movebuntur in conjunctione & oppositione ipsarum & solis *S*, quam in quadraturis. Et nodi annuli hujus seu intersectiones ejus cum plano orbis Planetæ *T* quiescent in Syzigiis; extra Syzigias vero movebuntur in antecedentia & velocissime quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completaque revolutione ad pristinum statum redibit, nisi quatenus per præcessionem nodorum circumfertur.

Coroll. 4. Si fluidum in alveo per superficiem Planetæ cujusvis *T* excavato contineatur & una cum Planeta suo motu periodico diurno uniformiter revolvatur; partes singulæ hujus fluidi ob attractionem solis per vices acceleratæ & retardatæ in Syzigiis suis, sive in meridie & media nocte, velociores erunt; in quadraturis sive hora sexta matutina & vespertina tardiores quam superficies globi contigua. Et quoniam vis LM trahit aquam deorsum maxime in quadraturis, & vis KL seu $NM - LM$ trahit eandem sursum maxime in Syzigiis; & hæ vires conjunctæ desinunt trahere aquam deorsum, & incipiunt trahere aquam sursum in octantibus ante Syzigias, ac desinunt trahere aquam sursum incipiuntque trahere aquam deorsum in octantibus post Syzigias: inde maxima aquæ altitudo evenire potest in octantibus post Syzigias, & minima in octantibus post quadraturas circiter; nisi qatenus motus ascendendi vel descendendi ab his viribus impressus vel per vim insistam aquæ paulo diutius perseveret, vel per impedimenta alvei paulo citius sistatur.

Coroll. 5. Quodsi annulus Planetam T cingens est solidus globoque Planetæ concentricus, cum ipso vero non cohærens, hic annulus variam eccentricitatem per attractionem sortietur, & si ad planum orbis Planetæ est inclinatus, angulus inclinationis, ubi Planeta a nodorum Syzigiis ad eorum quadraturas progreditur, continuo decrescit, estque motus anguli hujus decrescentis maximus in ipsis nodorum quadraturis. Ubi Planeta progreditur a nodorum quadraturis, motus anguli decrescentis continuat, quamvis minori cum velocitate propter actionem solis contrariam; itaque angulus inclinationis fit maximus in octantibus post quadraturas. Ab octantibus progrediendo angulus inclinationis continuo augetur estque maximus cres-

Fig. 23.

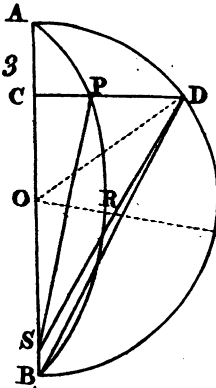
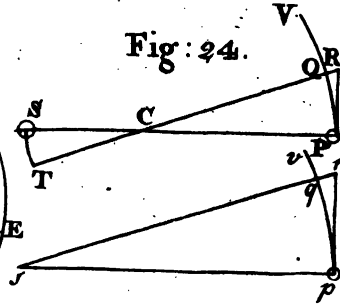


Fig. 24.



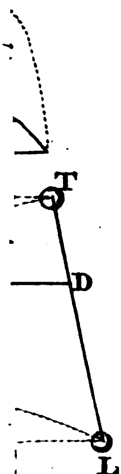


Fig. 26.

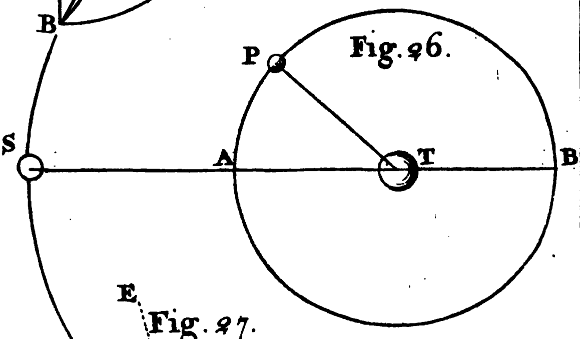


Fig. 27.

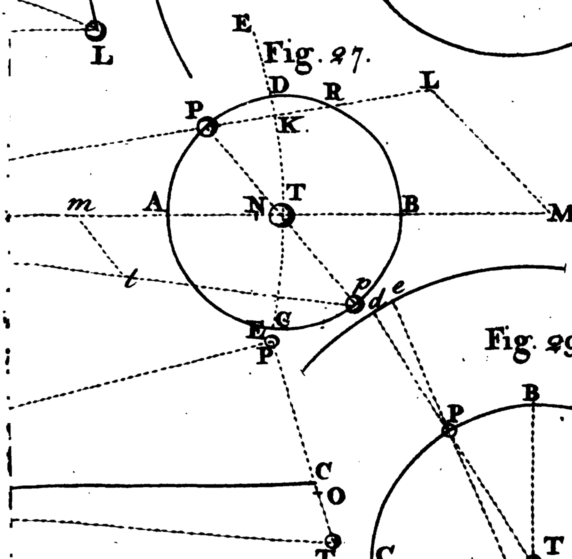
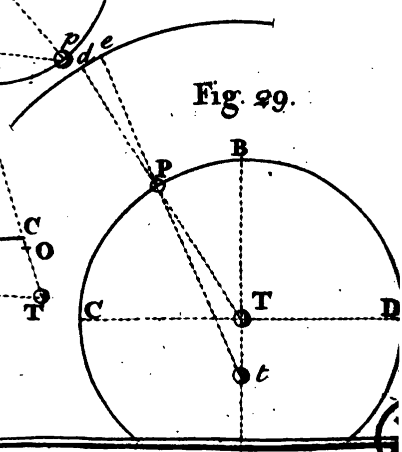


Fig. 29.



crescentis anguli motus in Syzigiis angulusque maximus in octantibus post Syzigias. Nodi etiam ex Planeta *T* spectati modo in antecedentia, viz. inde a Syzigiis ad octantes post quadraturas, modo in consequentia ab octantibus hisce ad octantes post Syzigias moveri, ideoque in quovis Planetæ periodo bis oscillari apparebunt, & post integram Planetæ revolutionem quoad stellas fixas in antecedentia moveri.

Coroll. 6. Quodsi globus Planetæ annulum interius contingat eique inhæreat, ille motum ejus participabit, & compages utriusque oscillabitur, nodique regredientur; tardius tamen, quam si annulus a globo separatus solus moveretur. Idem etiam eveniet, ubi globus in regionibus æquatoris vel altior est paulo, quam juxta polos, vel constat ex materia paulo densiore. Supplet vicem annuli iste materiæ in æquatoris regionibus excessus. Hinc præcessio æquinoctiorum, hoc est, punctorum æquinoctialium æque ac solstitiorum motus in antecedentia, sive lentus siderum motus in consequentia.

Sit *S* sol, *A b c d* ecliptica, *A e Q* (Fig. 39.) æquator, *p* polus, *p e* directio axis. Concipiatur planum æquatoris supra planum eclipticæ $23\frac{1}{2}$ gradus elevatum esse ita ut illud hoc ipsum secet in punctis *A* & *Q*, quæ nodos æquatoris vocamus. Sint nodi *A*, *Q*, in quadraturis, ut in loco 1 & 3, & erit sol in primo loco $23\frac{1}{2}$ gradus infra æquatorem *A e Q* depressus, & omnis terræ plaga intra circulum polarem arcticum contenta in hemisphærio tenebris obvoluto; igitur continua ibidem nox; quæ in hemisphærio boreali sunt solstitii brumalis phænomena: in altero vero loco 3 erit sol totidem gradus supra æquatorem *A e Q* elevatus & circulus polaris arcticus cum omni terræ plaga in eodem contenta totus a sole illustratus; quare continuus ibidem dies; quæ sunt solstitii æstivi phænomena. Ubi nodi sunt in Syzigiis, ut in loco 2, circulus *n p y*, qui hemisphærium a sole illustratum a tenebricoso dividit, per ipsum polum *p* transit, omnesque circulos parallelos bifariam dividit; quare in omnibus terræ locis æquinoctium est.

Si terra esset perfecte globularis, aut in omni circuitu ejusdem soliditatis, positio axis in omnibus ellipticæ locis priori *1 e* maneret parallela, quare ubique propter immensam fixorum distantiam ad eundem cœli astralis locum dirigeretur, exceptis paucis secundis, quibus in locis oppositis 1 & *c*, *b* & *d* differret, quæ parallaxis annua vocatur, & locus Syzigiæ nodorum *b* à loco quadraturæ 1 exacte 90 gradus circuli distaret, rotidemque gradus remota foret ab hac Syzigia *b* proxima quadratura *c*, &c.

Concipiatur jam terra formæ ellipticæ, regionesque sub æquatore altiores quam sub Polis; & evidens est, vim solis hemisphærium supra planum ellipticæ positum in loco 1. magis afficere, quam hemisphærium oppositum, quia regione giones æquatoris *A e Q* protuberantes ſoli propiores ſunt, quam regiones æquatoris in hemiſphærio altero.

Torquebitur ergo terra ita, ut planum æquatoris magis inclinet ad planum eclipticæ, & ut axis terræ pauliſper elevetur. Dum terra progreditur ab 1 verſus 2 regio æquatoris *f* ſoli proxima magis afficietur quam reliquæ; quare terra ex priori ſitu torquebitur ita, ut axis in partem ſolis flectatur; igitur, ubi terra veniret in 2, axis non in *e* ſed *g* dirigetur, & locus Syzigiæ 2 minus quam 90 gradus a præcedenti quadratura 1 diſtabit. Dum terra procedit a 2 verſus 3 axis *A g* pauliſper retorquetur, & locus quadraturæ minus quam 90 gradus a Syzigia 2 diſtabit, &c. Igitur poſt integram revolutionem quadratura nodorum ſeu ſolſtitium brumale non in priori loco 1, ſed in loco 5 erit, & proxima Syzigia non in loco 2 ſed 6. &c. Quare ſolſtitia & æquinoctia ſemper præcedere, ſive in aſtrorum antecedentia loca moveri videbuntur. Ipſa etiam axis poſt revolutionem quamvis integram, directionem mutabit, & circa polum eclipticæ circulum radio $23\frac{1}{2}$ graduum deſcribet, ſervata tamen ſemper eadem inclinatione ad planum eclipticæ. Igitur aſtra lento motu circa polum eclipticæ in conſeqentia ſigna moveri apparebunt. Moventur autem æquinoctia terræ non ſolum a ſolis ſed & lunæ vi. Nimirum vi ſolis retromoventur annuatim juxta Autoris computationem $9''$, $56'''$,

$50''''$,

50'''', & lunæ vi 40'', 52''', 52'''', qui motus ambo componunt totam præcessionem æquinoctiorum annuam 50'', 00''', 12'''', observationibus Astronomorum conformem.

De Corporum sphæricorum mutua attractione seu gravitatione.

Propositio XXIX. In systemate corporum plurium *A*, *B*, *C*, *D*, &c. si corpus aliquod *A* trahit cætera omnia *B*, *C*, *D*, viribus acceleratricibus, quæ sunt reciproce, ut quadrata distantiarium a trahente, & corpus aliud *B* trahit etiam cætera omnia *A*, *C*, *D*, viribus acceleratricibus, quæ sunt reciproce, ut quadrata distantiarum a trahente; erunt absolutæ corporum trahentium *A*, *B*, vires ad invicem ut sunt ipsa corpora *A*, *B*, quorum sunt vires. Nam in corporibus *A* & *B* sese invicem attrahentibus æqualis est motus quantitas, propter actionem reactioni semper æqualem. Est autem quantitas motus factum ex materiæ quantitate in velocitatem; ergo velocitates sunt inter se reciproce ut materiæ quantitates. Sed velocitates æquantur viribus acceleratricibus corporum trahentium, tanquam earum causis. Igitur vires acceleratrices corporum trahentium sunt inter se, ut eorum massæ. Sed vires acceleratrices, quibus corpus *A* reliqua corpora ad se trahit paribus distantiis sibi invicem æquantur ex hypothesi; simi-

similiter vires acceleratices, quibus corpus *B* reliqua attrahit paribus distantiis, sibi invicem æquantur. Et vires acceleratrices, quibus corpora dua alia corpora paribus distantiis ad se trahunt, sunt inter se invicem, ut eorum vires absolutæ. Igitur vires absolutæ corporum *A* & *B* sunt inter se ut eorum massæ.

Propositio XXX. Si ad sphæricæ superficiei physicæ, sive tunicæ sphæræ ubique quam tenuissimæ, puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis; corpusculum intra superficiem ubilibet constitutum his viribus nullam in partem attrahetur: sed vel quiescet, vel motum quemvis inceptum sine perturbatione continuabit, pariter acsi nullis omnino viribus a superficie illa urgeretur. Sit *P* corpusculum intra superficiem sphæricam *IHKL* (Fig. 38.) constitutum. Ducantur per *P* rectæ *HL*, *IK*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes. Hi arcus quam minimi rectis æquantur, & triangula *HPI*, & *KPL*, propter angulos ad verticem. *P* oppositos æquales, & latera *HP*, *IP*, & *KP*, *LP* proportionalia, per *Prop.* 34. Geom. sunt inter se, ut distantiæ *IP*, *PL*. Eodem modo probatur, latera omnia duarum particularum, cujuscunque sint figuræ, superficiei sphæricæ, sibi invicem oppositarum, quæ a rectis per corpusculum *P* ductis intercipiuntur, esse ad seinvicem proportionalia. Ergo particulæ illæ sunt sibi invicem similes, & proinde

in

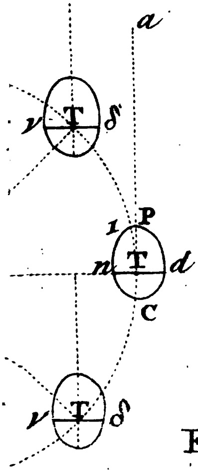
in ratione arcuum *H I*, *K L*, sive distantiarum *I P*, *P L*, duplicata. Igitur vires harum particularum in corpusculum *P* exercitæ sunt inter se æquales: sunt enim ut particulæ directe & quadrata distantiarum inverse; quæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Quare attractiones in contrarias partes æqualiter factæ se mutuo destruunt. Simili argumento probatur attractiones omnes per totam sphæricam superficiem a contrariis attractionibus destrui. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur.

Coroll. Quodsi ergo in tellure nostra sphærica esset cavitas centralis; omnia animalia in illa cavitate contenta tam sponte moveri possent, ac in ipsa terræ superficie. Nam crusta terræ, quæ tanquam ex pluribus ejusmodi tunicis composita concipi potest, vi gravitatis seu attractionis motus eorum nullatenus turbaret.

Propositio XXXI. Iisdem positis corpusculum, extra sphæricam superficiem constitutum, attraheretur ad centrum sphæræ vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.

Sit *F Φ G p* (Fig. 40.) superficies sphærica *A* & *B*, duo diversa loca in quibus corpusculum constituitur. Concipiatur sphæra in numerum infinitum circulorum seu annulorum tenuissimorum divisa, quorum axes perpendiculares sunt ad axin sphæræ *F G*, & capiantur duæ particulæ annuli cujuslibet *P* & *p* ab axe annuli

Fig : 31.



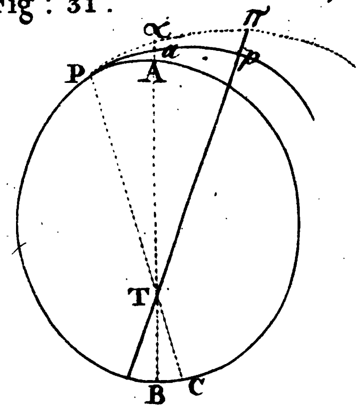
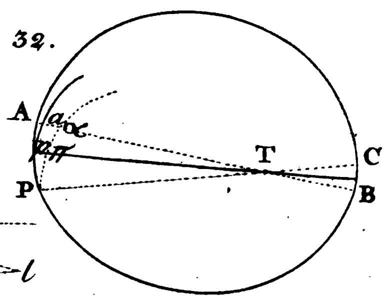


Fig : 32.



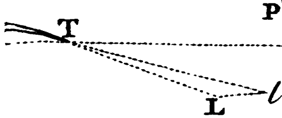


Fig : 36.

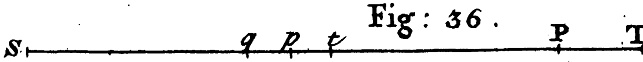


Fig : 37.

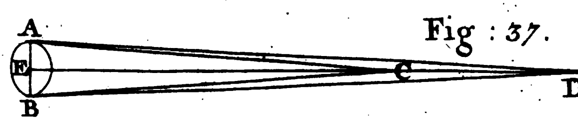


Fig : 35.

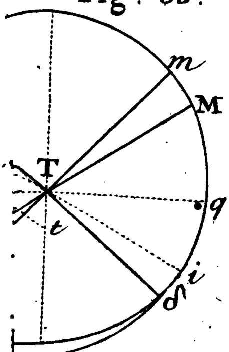
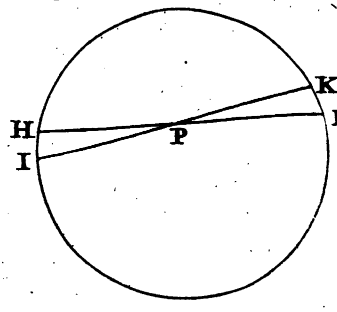


Fig : 38.



D æque diſtantes, harum vires, quia a corpuſculo *B* æque diſtant, ſunt æquales. Exponant has vires rectæ *B P* & *B p*; & dividatur vis *B P* in vires *B D* & *P D*, ac vis *B p* in vires *B D* & *p D*; & evidens eſt, vires *P D* & *p D*, quia ſunt æquales & ſibi invicem contrariæ, ſeſe invicem deſtruere; igitur reliquæ vires *BD* & *BD* idem valent ad movendum corpuſculum in directione *BD*, ac vires *BP* & *Bp*. Eadem demonſtratio eſt de quibuſvis aliis binis particulis ab annuli axe *D* æque diſtantibus. Igitur omnium particularum totius annuli vires concipi poſſunt tanquam in axe ejus concurrentes. Et eodem argumento reliquorum annulorum vires in axibus eorum concurrere liquet. Omnes vero axes conjunctim circulum *F D G* componunt. Concipiatur hic circulus circum axem ſuum rotari donec perveniat in locum *F P G p*, & ſimili argumento priori probatur omnes vires particularum ejus concurrere in diametro *F G*. Sed vis in *F* trahens corpuſculum *B* eſt ad vim in *G* ut *G B* quad. ad *F B* quad. & hæ duæ vires conjunctim æquantur duplo quadrati *B C*, quod eſt proportionale vi trahenti corpuſculum *B* in centro circuli *C*. Nam *B C* quadratum eſt medium proportionale inter quadrata *B G* & *B F*. Sit enim $BF = a$, $FC = b$; erit quadratum $BF = aa$, & quadratum $BG = aa + 4ab + 4bb$, & media proportionalis inter hæc duo quadrata $= aa + 2ab + bb$, quod eſt

quad.

quad. *B C*. Igitur qua ratione vis in distantia *B F* diminuitur, eadem ratione vis in distantia *B G* augetur; ideoque in distantia *B C* æquales deveniunt. Eodem modo probatur binorum quorumcunque corpusculorum vires a centro *C* æque distantium, æquari viribus eorundem corpusculorum in centro circuli *C* constitutorum. Igitur omnes vires per totam superficiem dispersæ concipi possunt tanquam in centro *C* concurrentes. Sed hæ vires fortius attrahunt corpusculum in *B* quam in *A* constitutum. Estque attractio ipsius *A* ad attractionem ipsius *B*, ut *B C* quadratum ad *A C* quadratum.

Coroll. Et quoniam sphæra in ejusmodi superficies sphæricas innumeras concentricas dividi potest, & attractiones corpusculi a singulis superficiebus in diversis distantiis a centro earundem communi sunt in ratione distantiarum duplicata reciproce; vires omnium superficierum conjunctim, hoc est totius sphæræ, attrahentes corpusculum in diversis a centro ejus distantiis erunt in eadem ratione.

Prop. XXXII. Si extra sphæras homogeneas, hoc est, ejusdem soliditatis, ponantur corpuscula æqualia, quorum distantiæ a centris sphærarum suarum sint inter se, ut semidiametri sphærarum; vires, quibus corpuscula trahuntur, erunt etiam inter se, ut sphærarum suarum semidiametri. Nam vires omnium particularum sphæræ simul sumtæ æquantur vi totius sphæræ, ergo vires sphærarum inæqualium ejusdem solidita-

tis

tis sunt inter se, ut ipsæ sphæræ, hoc est, in ratione triplicata diametrorum. Resolvantur sphæræ in particulas similes & similiter positas ad corpuscula; & erunt vires, quibus corpuscula ad particulas sphærarum suarum attrahuntur, inter se in ratione composita ex ratione particularum, & ratione distantiarum suarum a corpusculis duplicata inverse, hoc est, in ratione triplicata diametrorum directe, & ratione duplicata earundem diametrorum inverse, quæ est ratio diametrorum sive semidiametrorum directa.

Coroll. 1. Hinc si corpuscula in circulis circa sphæras homogeneas revolvantur, sintque distantiæ a centris sphærarum proportionales earundem diametris; tempora periodica erunt æqualia, quia vires centripetæ sunt in hoc casu ut sphærarum diametri, sive distantiæ a centris sphærarum. Et vice versa, si tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt proportionales diametris. Constat hoc *Coroll.* per *Prop.* 8. *Coroll.* 1.

Coroll. 2. In æqualibus distantiis a centris homogenearum sphærarum attractiones sunt, ut sphæræ.

Prop. XXXIII. Intra sphæram aliquam homogeneam corpusculum constitutum attrahitur vi proportionali distantiæ suæ ab ipsius centro. Sit corpusculum constitutum intra sphæram *A B C D* (Fig. 41.) in loco *P*, & sit distantia ejus a centro sphæræ *P S*. Describatur radio

P S

P S circulus concentricus *P D Q F*; & per *Prop.* 30. *Coroll.* patet, eam sphæræ partem, quæ intra superficies *A C B D* & *P D Q F* continetur, nullam in corpus *P* vim exserere. Restat ergo vis *P D Q F*; quæ est per *Prop.* præced. ut ipsa sphæræ semidiameter *P S*, hoc est, crescit aut decrescit in eadem ratione ut corporis distantia a centro sphæræ *S*.

Prop. XXXIV. Vires quibus sphæra aliqua trahit aliam homogeneam in diversis centrorum distantiis a seinvicem, sunt in ratione duplicata harum distantiarum reciproce. Nam particulæ cujusvis attractio est reciproce, ut quadratum distantiæ ejus a centro sphæræ trahentis, per *Coroll. Prop.* 31. & propterea eadem est, acsi vis omnis attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus sphæræ. Hæc autem attractio tanta est, quanta foret vicissim attractio, qua singulæ sphæræ attractæ particulæ corpusculum illud in centro sphæræ trahentis locatum omnemque ejus vim comprehendens traherent. Foret autem illa corpusculi attractio in diversis a centro sphæræ trahentis distantiis in ratione distantiarum duplicata reciproce. Igitur & sphæræ attractio corpusculi attractioni æqualis erit in eadem ratione.

Coroll. 1. Vires quibus sphæræ ab aliis homogeneis in distantiis diversis attrahuntur, sunt in ratione composita ex ratione sphæra-

rum

rum trahentium directe, & ratione duplicata distantiarum centrorum suorum inverse.

Coroll. 2. Idem valet ubi sphæra attracta etiam attrahit; geminatur enim hoc casu vis attractionis mutuæ conservatis proportionibus.

Prop. XXXV. Si sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem & vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undique similares; & vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicata ratione distantiæ corporis attracti; vires, quibus hujusmodi sphæræ sese invicem attrahunt in diversis centrorum suorum distantiis, sunt quadratis harum distantiarum reciproce proportionales. Nam cujusque sphæræ descriptæ vis omnis tanquam in centro constituta concipi potest. Hæc autem vis augetur, aut diminuitur, in ratione duplicata distantiæ crescentis, aut decrescentis, reciproce.

Coroll. 1. Hinc sphærarum hujusmodi vires se invicem attrahentes in data centrorum distantia sunt, ut ipsæ sphæræ trahentes. In diversis autem distantiis sunt ut sphæræ applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra.

Coroll. 2. Attractiones motrices seu pondera sphærarum in sphæras sunt in data centrorum distantia, ut sphæræ attrahentes & attractæ conjunctim. Inque distantiis diversis in ratione sphærarum attrahentium & attractarum directe, & ratione distantiarum duplicata inverse.

Coroll. 3. Sphærarum ejusmodi motus circa alias eisdem legibus peragitur, acsi centra illarum sola circa centra harum moverentur.

Lemma 11. Dividatur *P H* (Fig. 42.) in partes quotcunque *P A*, *P F*, *P H*, & erigantur ex punctis sectionum *A*, *F*, *H*, perpendiculares *A L*, *F K*, *H I*, sintque hæ inter se, ut quadrata segmentorum *P A*, *P F*, *P H*, reciproce, transeatque curva per puncta *L*, *K*, *I*; dico aream *A H I L* esse, ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$. Sit enim $PA = x$, $PH = z$; & erit *A L* ad *H I*, ut $\frac{1}{xx}$ ad $\frac{1}{zz}$. Et fluxio areæ intra curvam & *P A* ad fluxionem areæ intra curvam & *P H* ut $\frac{\dot{x}}{xx}$ ad $\frac{\dot{z}}{zz}$; quare ipsæ areæ sunt inter se ut $-1\,x^{-1}$ ad $-1\,z^{-1}$, sive ut $\frac{-1}{x}$ ad $-\frac{1}{z}$. Auferatur illa ab hac, quæ remanet area *A H I L* erit ut $\frac{1}{x} - \frac{1}{z}$, hoc est ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$. *Q. E. D.*

Prop. XXXVI. Sit *D E A* (Fig. 43.) circulus physicus, sive orbis tenuissimus, materia ubique homogenea constans, ad planum delineationis

ationis perpendicularis, ita ut linea $\mathfrak{P}A$ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistat; sitque corpusculum aliquod in quocunque loco P rectæ PA constitutum; & attrahatur illud ab omnibus & singulis circuli punctis viribus æqualibus, decrescentibus in distantiarum a corpusculo P ratione duplicata; fiat denique PH æqualis PD; attractio corpusculi P in circulum erit, ut AH applicata ad PH. Ducatur enim a circuli puncto quovis E ad corpusculum $\mathfrak{P}$ recta $\mathfrak{P}E$, & fiat ei æqualis $\mathfrak{P}F$. Erigantur ex punctis H, F, A, normales HI, FK, AL, quæ sint ut vires quibus puncta D, E, A, trahunt corpusculum P, hoc est in ratione duplicata distantiarum DP, $E\mathfrak{P}$, AP, inverse; transeatque curva per puncta I, K, L; erit corpusculi P attractio in circulum, ut area $AHIL$ ducta in altitudinem AP. Ducatur enim recta Pe rectæ $\mathfrak{P}E$ quamproxima, & in PE, $\mathfrak{P}A$, capiantur PC, Pf, ipsi Pe æquales. Et quoniam vis, qua annuli centro A intervallo AE in plano prædicto descripti punctum quodvis E trahit ad se corpus P, ponitur esse ut FK; & inde vis, qua punctum illud trahit corpus $\mathfrak{P}$ versus A, est ut $\frac{\mathfrak{P}A \times FK}{\mathfrak{P}E}$; (nam ut PE est ad PA, sic FK ad $\frac{PA \times FK}{PE}$) & vis, qua annulus totus trahit corpus $\mathfrak{P}$ ver-

 sus

sus A, est ut annulus & $\frac{PA \times FK}{\mathcal{P}E}$ conjunctim; annulus autem iste est ut rectangulum sub radio AE & latitudine Ee, & hoc rectangulum (ob proportionales PE & AE, Ee & CE) æquatur rectangulo $PE \times CE$ seu $PE \times Ff$; vis qua annulus iste trahit corpus P versus A, est ut $PE \times Ff$ & $\frac{PA \times FK}{\mathcal{P}E}$ conjunctim, id est, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, sive ut area $FKkf$ ducta in $A\mathcal{P}$. Et propterea summa virium, quibus annuli omnes in circulo Dd trahunt corpus $\mathcal{P}$ versus A, est ut area tota $AHIKL$ ducta in AP.

Sed quoniam ordinatæ HI, FK, AL, sunt in ratione abscissarum $\mathcal{P}H$, $\mathcal{P}F$, $\mathcal{P}A$ duplicata inverse, & area $AHIKL$ per *Lemma* præced. est ut $\frac{1}{\mathcal{P}A} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpusculi $\mathcal{P}$ in circulum, ut $\frac{PA}{PA} - \frac{\mathcal{P}A}{PH}$, hoc est, ut $1 - \frac{PA}{\mathcal{P}H}$, sive ut $\frac{AH}{\mathcal{P}H}$. Q. E. D.

Prop. XXXVII. Supposita eadem (Fig. 44.) lege attractionis; vis, qua cylindrus, parallelogrammo $ADEB$ circa axem AB revoluto descriptus, trahit corpusculum P in puncto quovis axis PAB constitutum, est ut $AB - \mathcal{P}E + \mathcal{P}D$. Ducatur enim curva IKL, cujus ordi-

ordinatæ *B I*, *F K*, &c. sint ut $1 - \frac{PB}{PE}$, $1 - \frac{PF}{PR}$, &c. quæ sunt rationes, quibus vires circulorum *EC*, *RS*, &c. attrahunt corpusculum *P*, per *Prop.* præced. & ponatur $PB = x$, $PA = z$, $BE = 1$; erit $1 - \frac{PB}{PE} = 1 - \frac{x}{\sqrt{xx+1}}$; & fluxio areæ inter curvam & $PB = \dot{x} - \frac{x\dot{x}}{\sqrt{xx+1}}$. Prioris partis quantitas fluens est x, & posterioris $\sqrt{xx+1}$. Pone enim $\sqrt{xx+1} = z$, erit $x = \sqrt{zz-1}$, & $xx+1 = zz$, & hujus fluxio $2x\dot{x} = 2z\dot{z}$, & $\dot{x} = \frac{z\dot{z}}{x}$. Ergo $\frac{x\dot{x}}{\sqrt{xx+1}} = \frac{\sqrt{zz-1} \times z\dot{z}}{\sqrt{zz-1} \times z} = \frac{z\dot{z}}{z} = \dot{z}$, cujus quantitas fluens est $z = \sqrt{xx+1}$. Ergo area inter curvam & *P B* est $x - \sqrt{xx+1}$, hoc est $PB - PE$. Eodem modo probatur aream inter curvam & *P A* esse $PA - PD$. Auferatur hæc ab illa, residuum $PB - PA - PE + PD = AB - PE + PD$ est area *A B I L*.

Coroll. Si axis minor sphæroidis *P R B R* (Fig. 45.) est ad axin ejus majorem, ut 100 ad 101; vis, qua ſphæroïs attrahit corpuſculum in loco P, eſt ad vim, qua ſphæra, cujus axis æquatur axi minori ſphæroidis, attrahit idem corpuſculum in eodem loco P, ut 126 ad 125 quam proxime. Eſt enim attractio ſphæroidis $PRBR$ ad attractionem ſphæræ $PrBr$, ut attractio cylindri $DDEE$ ad attractionem cylindri $ddee$, hoc eſt, ut $PB - PE + PD$ ad $PB - Pe + Pd$, ſive ut $PB + PD - \sqrt{PBq + BEq}$ ad $PB + Pd - \sqrt{PBq + Pdq}$, hoc eſt, ſi PB eſt 100 & RR 101, ut $150\frac{1}{2} - \sqrt{12550\frac{1}{4}}$ ad $150 - \sqrt{12500}$, ſive ut 38.48 ad 38.20, quod eſt ut 126 ad 125 quamproxime.

PARS

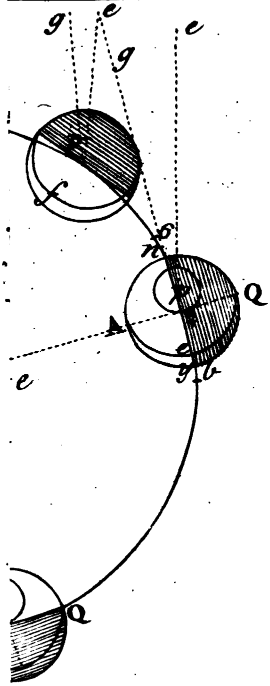
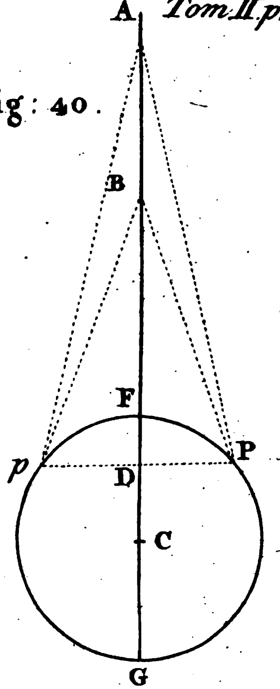


Fig: 40.



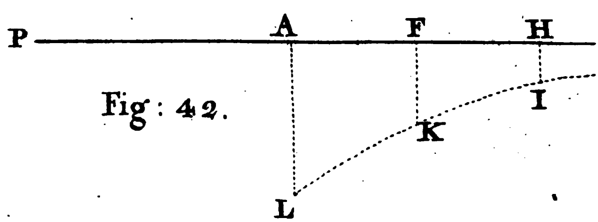
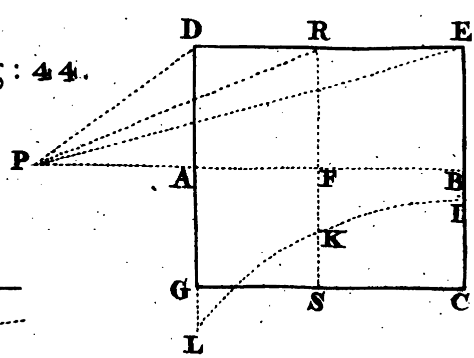
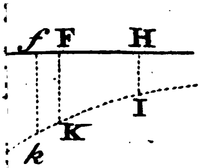


Fig: 42.

Fig: 44.





PARS III.

DE

Systemate Mundi.

QUÆ hactenus in propositionibus illis, quæ de viribus corporum centripetis agunt, non sunt nisi supposita, quantùm cum naturæ phænomenis conveniant, ex observationibus Astronomorum eruendum est; & ex his phænomenis, quæ virium centripetarum leges in Mundi Systemate obtineant, firmiter tandem concluditur. En igitur naturæ phænomena ex Autoris libro tertio excerpta, & in gratiam eorum, qui Astronomiæ sunt imperiti, paucis explicata.

Phænomenon I.

Planetæ omnes, viz. Mercurius, Venus, Terra, cum satellite suo Luna, Mars, Jupiter cum quatuor, & Saturnus cum quinque satellitibus suis, a sole lumen suum, quo fulgent, mutuantur, & in orbibus suis circa solem revolvuntur eo ordine, ut Figura 46. referuntur sub signis suis. Significat nimirum ☿ Mercurium, ♀ Venerem, ♁ Terram, ☽ Lunam, ♂ Martem, ♃ Jovem, ♄ Saturnum. Et ab hoc systemate solari stellæ fixæ spatiis immensis distant.

Mercurium & Venerem soli lumen suum debere, & circa ipsum revolvi, ex eorum phasibus probatur. Plena enim facie lucent ultra solem siti; dimidiata sive dichotoma, cum sunt a latere solis, sive in elongatione ab eodem maxima, falcata cis solem; per discum ejus ad modam macularum nonnunquam transeunt: Sæpissime vero infra solem constituti disparent. Etenim ultra solem constituti hemisphærium a solis radiis illustratum nobis obvertunt; cis solem vero hemisphærium a sole aversum & tenebris involutum; in elongationibus vero a sole, partim lucidum, partim tenebricosum. Martem esse corpus opacum ex gibbosa ejus facie apparet, qua circa quadraturas splendet, quia in illa positione hemisphærium ejus non totum, sed solummodo partem

ejus

ejus, licet majorem, cernimus, alteram partem orbis ejus caligine cælante. At circa conjunctionem & oppositionem pleno lumine fulget, hæmisphærium suum lucidum nobis totum obvertens. Et eodem argumento, nec non ex diametro ejus apparente circa oppositionem, ubi terræ est proximus, quadruplo majore, quam circa conjunctionem, ubi ipso sole remotior est, concluditur, eum circa solem revolvi in orbe, qui telluris orbe latius extenditur. Jovem & Saturnum, eorumque satellites, esse corpora oppaca, & omne lumen suum soli debere, & satellitum, & disci eorum, eclipsibus elucet. Etenim ubi satellites Jovis & Saturni in umbram eorundem immerguntur, tenebris obfuscati disparent; ubi vero discos eorum subeunt, umbras suas in eosdem spargunt, quæ maculas per discos transeuntes referunt. Ex Jovis & Saturni phasibus semper plenis demonstratur; eos circa solem revolvi in orbibus, qui ultra Martis orbem spatiis admodum longinquis extenduntur.

Terram nostram esse tenebricosam & opacam, extra omnem controversiam positum est, eandem vero circa solem annuatim revolvi in orbe illo magno, qui medium inter Veneris & Martis orbes tenet, ex apparente cæterorum Planetarum motu certum est. Etenim cum omnes Planetarum motus ad stellas fixas referamus, ipsius vero telluris motum non percipiamus, sol nobis quotannis per omnia Zodiaci signa na ab occidente in orientem moveri videtur, uti ex inspectione figuræ 47. apparet. Sit enim sol *S*, *A B C* orbis terræ & *a b c* sphæra fixarum; ubi terra est in *A*, sol in sphæra fixarum conspicitur in *a*; ubi terra pervenit in *B*, sol videtur in *b*; ubi terra pervenit ad *C*, sol conspicitur in *c*, &c. quare sol per omnia Zodiaci signa moveri videtur, dum terra circa solem revera revolvitur. Mercurius & Venus secundum ordinem signorum progredi videntur, ubi ultra solem versantur; retrogradi, ubi cis solem; in locis intermediis stationarii apparent, licet in orbibus suis revera semper progrediantur. Sit enim *A C E* orbis terræ, 1. 2. 3. 4, (Fig. 48.) orbis Mercurii, & moveatur terra ex *A* per *B* in *C*, & Mercurius ex 1 per 2 in 3; hic omni hoc tempore ex *a* per *b* in *c* secundum ordinem signorum progredi apparebit; at ubi terra moveatur ex *C* per *D* in *E*, & Mercurius ex 3 per 4 in 5; hic per *d* in *e* retrogredi videbitur: antequam autem retrogredi cœperit, aliquantulum temporis eodem in loco hærere cernetur. Et eadem ratio est Veneris. Quoniam autem Veneris elongatio major est, quam Mercurii, illius orbem latius extendi, quam hujus, evincitur.

Planetæ superiores, ubi sole sunt a terra remotiores, progredi; ubi vero propiores sunt, retrogradi; in locis intermediis stationarii videntur. Sit enim *A B C*, &c. (Fig. 49.) orbis terræ, 1. 2. 3. &c. orbis Martis, & moveatur

atur terra ex *A* per *B* & *C* in *D*, Mars vero ex 1 per 2 & 3 in 4; hic ipse omni hoc tempore ex *a* per *b* & *c* in *d* secundum ordinem signorum progredi videbitur: at ubi terra moveatur ex *D* in *E*, & Mars ex 4 in 5; ipse ex loco *d* in *e* retrogradi apparebit; antequam autem regrediatur, in eodem loco aliquantulum hærere conspicietur. Idem etiam verum est de Jove & Saturno.

Lunam corpus opacum esse ex ejus phasibus & eclipsibus adeo conspicuum est, ut ne vulgo quidem lateat. Eandem vero terræ satellitem esse exinde concluditur, quod omnium Planetarum terræ proximus est, & intra 27 dies paucasque horas per omnia Zodiaci signa motu progrado semper moveri cernitur.

PHÆNOMENON. II.

Tempora periodica Planetarum primariorum, hoc est, Mercurii, Veneris, Terræ, Martis, Jovis & Saturni, circa solem sunt in ratione sesquiplicata distantiarum mediocrium eorundem a sole reciproca, hoc est, quadrata temporum periodicorum sunt inter sese, ut cubi distantiarum mediocrium reciproce; Tempora periodica, hoc est, tempora quibus Planetæ motum suum circa solem absolvunt, sedulæ Astronomorum observationes determinarunt, & distantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis, per ana-

analogiam dictam, quæ Astronomorum ingenti lumine *Keplero* debetur, respondent, non differunt sensibiliter a distantiis, quas astrorum diversi observatores invenerunt, suntque inter ipsas utplurimum intermediæ, uti in tabula sequente videre licet.

Planetarum tempora periodica circa solem respectu fixarum in diebus & partibus diei decimalibus.

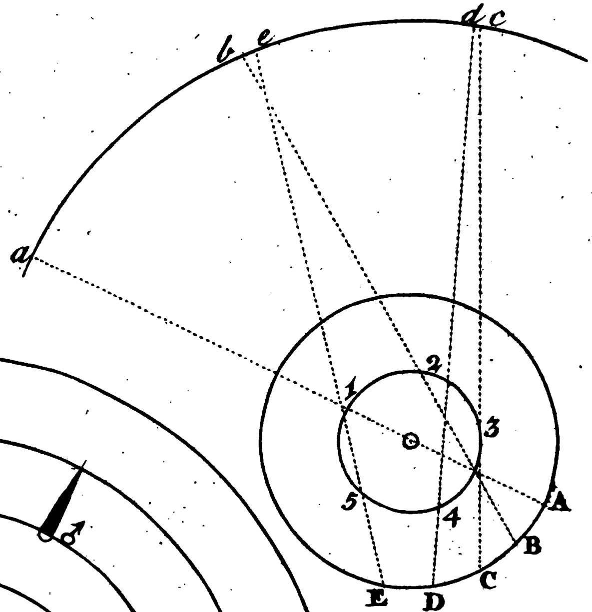
♄	♃	♂
10759.275.	4332.514.	686.9785.
♁	♀	☿
365.2565.	224.6176	87.9692.

Planetarum ac telluris distantiæ mediocres a sole in partibus ejusmodi, quales distantia terræ a sole continet 100000.

	♄	♃	♂	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica.	954006.	520096.	152369.	72333.	38710.

De distantiis Mercurii & Veneris a sole disputandi non est locus, cum hæ per eorum elongationes a sole determinentur, ut ex inspectione

Fig : 48



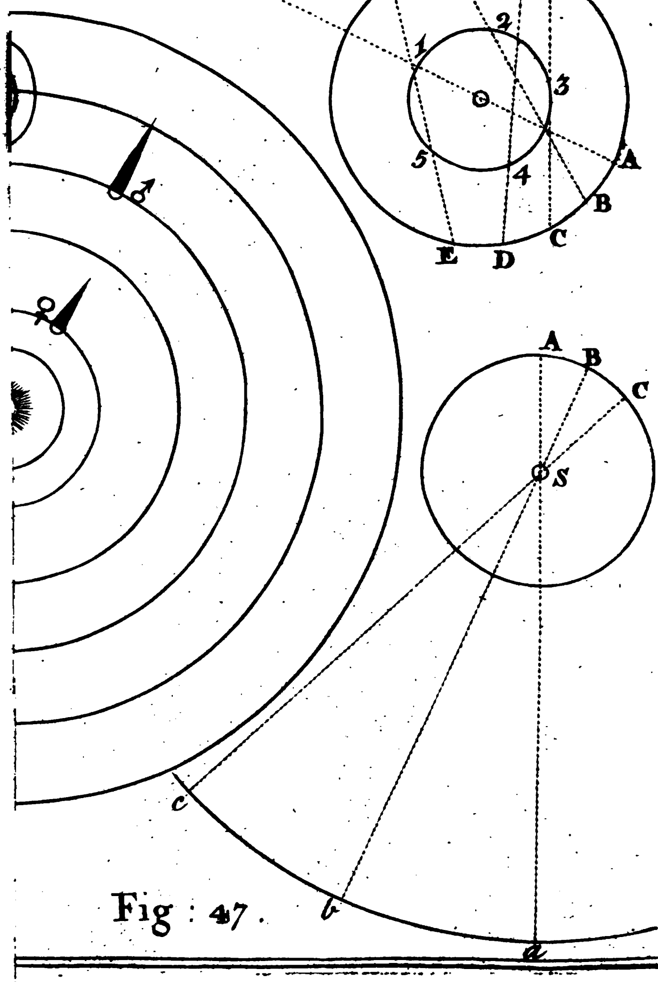


Fig : 47

tione figuræ cuivis obviam eſt. De diſtantiis etiam ſuperiorum Planetarum a ſole tollitur omnis diſputatio per eclipſes ſatellitum Jovis. Etenim per eclipſes illas determinatur poſitio umbræ, quam Jupiter projicit, & hæc poſitio longitudinem ejus heliocentricam ſuppeditat. Ex longitudinibus autem heliocentrica & geocentrica inter ſe collatis determinatur diſtantia Jovis. Sit S ſol, (Fig. 50.) T Terra, J Jupiter, p ſatelles in umbra Jovis. Sit quoque l locus, in quo terra ex ſole conſpicitur, qui ſemper ſolis loco eſt oppoſitus; o & n loci in quibus Jupiter & ſatelles ejus ex terra videntur, qui longitudines eorum geocentricæ vocantur; m locus in quo uterque ex ſole conſpicitur, qui longitudo heliocentrica nuncupatur. Ex longitudine ſatellitis geocentrica habetur angulus pTl. Ducatur ex I perpendicularis Iq, & ex p recta pr parallela rectæ TS, & habebitur ex obſervatione per angulum ITq elongatio ſatellitis a Jove Iq, quæ eſt ad elongationem maximam pI ex obſervatione antecedenti notam, ut ſinus anguli Ipq ad ſinum totum. Dabitur ergo angulus Ipq, qui ab angulo rpT, angulo qTl æquali ſubſtractus relinquit angulum rpI. Dato angulo rpI, latere pI & angulo prI, ipſi rTS æquali (qui eſt complementum longitudinis geocentricæ Jovis ITl ad duos angulos rectos) habebitur latus pr; & propter ſimilitudinem triangulornm pIr & S

IT

IT, erit rp ad pI, ut ST diſtantia terræ a ſole ad SI diſtantiam Jovis a ſole.

PHÆNOMENON III.

Satellites Jovis, radiis ad centrum Jovis ductis, areas deſcribunt temporibus proportionales; eorumque tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, ſunt in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum ab ipſius centro.

Conſtat ex obſervationibus Aſtronomicis. Orbes horum Planetarum non differunt ſenſibiliter a circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora vero periodica eſſe in ſeſquiplicata ratione ſemidiametrorum orbium conſentiunt Aſtronimi, & idem ex tabula ſequenti manifeſtum eſt.

Satellitum Jovialium tempora periodica.

	d.	*h.*	′	″		*d.*	*h.*	′	″
1mi	1.	18.	27.	34.	2di	3.	13.	13.	42.
3tii	7.	3.	42.	36.	4ti	16.	16.	32.	9.

Diſtan-

Distantiæ Satellitum a centro Jovis.

Ex observationib.	1	2	3	4
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$
Townley per Micr.	5.52	8.78	13.47	24.72
Cassini per Telesc.	5.	8	13	23.
Cassini per eclipses Satellit.	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$
Ex tempor. period.	5.667	9.017	14.384.	25.299.

Dr. *Pound* Micrometro in tubo 15 pedes longo aptato elongationem maximam heliocentricam satellitis quarti a centro Jovis in mediocri Jovis a terra distantia observavit esse 8, 16″. & satellitis tertii micrometro in telescopio pedes 123 longo in eadem Jovis a terra distantia 4′, 42″. Elongationes maximæ reliquorum satellitum in eadem Jovis a terra distantia ex temporibus periodicis prodeunt 2′, 56″, 47‴, & 1′, 51″, 6‴. Quodsi ergo diameter Jovis assumatur 37″¼, qui numerus observationibus est quam proximus, elongationes satellitum prodeunt semidiametris Jovis, 1^{mi} 5.695. 2^{di} 9.494. 3^{tii} 15.141. 4^{ti} 26.63.

PHÆ-

PHENOMENON IV.

Satellites Saturni, radiis ad Saturnum ductis, areas describunt temporibus proportionales; & eorum tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, sunt in ratione sesquiplicata distantiarum ab ipsius centro.

Ex *Cassini* observationibus hoc apparet. Sunt enim

Satellitum Saturni tempora periodica.

	d.	h.	′.	″.		d.	h.	′	″.
1^{mi}	1.	21.	18.	27.	3^{tii}	4.	12.	25.	12.
2^{di}	2.	17.	41.	22.	4^{ti}	15.	22.	41.	14.
					5^{ti}	79.	7.	48.	00.

Distantiæ satellitum a centro Saturni in semidiametris annuli.

Ex observation:	$1\frac{19}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24
Ex temp. per:	1.93.	2.47.	3.45.	8.	23.35

Elongatio maxima satellitis quarti a centro Saturni micrometro optimo & telescopio *Hugeniano* 123 pedes longo adapto capta prodiit semidiametrorum $8\frac{7}{10}$. Et ex hac observatione & temporibus periodicis distantiæ satellitum a centro Saturni sunt in diametris annuli 2, 1. 2, 69. 3, 75. 8, 7. & 25, 35. Saturni diameter in in eodem telescopio erat ad diametrum annuli ut 3 ad 7, & diameter annuli *A.* 1719. *d.* 28 & 29 maji prodiit 43″. Et inde diameter annuli in mediocri Saturni a terra distantia est 42″, & diameter Saturni 18″. Sed si rejiciatur omnis lux erratrica, erit hæc haud major quam 16″.

PHÆNOMENON. V.

Planetæ primarii, radiis ad terram ductis areas describunt minus proportionales; at radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales percurrunt. Nam respectu terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur: at solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celererius tamen in periheliis, hoc est, ubi soli sunt proximi, quam in Apheliis, ubi a sole sunt remotissimi, sic ut arearum æquabilis sit descriptio. In Jove demonstratur hæc propositio per eclipses satellitum, quibus heliocentricæ hujus Planetæ longitudines & distantiæ a sole determinantur, ut supra dictum est. In terra vero probatur ex motu solis annuo in ecliptica, & diametris ejusdem apparentibus, quibus motus terræ in orbe suo & distantiæ a sole determinantur.

PHÆNOMENON. VI.

Luna radio ad centrum terræ ducto areas temporibus proportionales describit quam proxime.

Patet ex lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus lunaris & arearum æquabilis descriptio aliquantulum a vi solis.

Propositio XXXVIII. Vires, quibus Planetæ primarii perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in orbibus suis retinentur, respiciunt solem, & sunt reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Patet pars prior propositionis per *Phænom.* 5. & *Prop.* 5. & pars posterior per *Phænom.* 4. & *Prop.* 11. accuratissime autem per quietem apheliorum. Nam aberratio quam minima ab hac ratione duplicata motum absidum in singulis revolutionibus notabilem efficere deberet ut in *Prop.* 26. demonstratum est.

Propositio XXXIX. Vires, quibus satellites Jovis & Saturni perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in orbibus suis retinentur, respiciunt centrum Jovis ac Saturni, & sunt reciproce ut quadrata distantiarum eorum ab eodem centro. Patet pars prior propositionis per *Phænom.* 3 & 4. collata cum *Prop.* 5. & posterior per eadem *Phænom.* collata cum *Coroll.* 4. *Prop.* 8.

Prop.

Prop. XL. Vis, qua luna retinetur in orbe ſuo, terram reſpicit, & eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro quam proxime. Patet pars prior aſſertionis per *Phænom.* 6. & prop. 5. & pars poſterior per motum tardiſſimum lunaris apogæi ab actione ſolis productum, ut in *Prop.* 26. fuſius explicatum eſt. Id quod etiam plenius conſtabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis.

Prop. XLI. Luna gravitat in terram, & vi gravitatis retrahitur a motu rectilineo, & retinetur in orbe ſuo. Etenim cum lunæ mediocris diſtantia ſit 60 ſemidiametrorum terræ; ipſa orbita lunæ ex circumferentia terræ, quæ eſt 123249600 pedum Pariſienſium, determinari poteſt, & eſt 7394976000. pedum, ipſiuſque diameter 2353893840. pedum. Et dato tempore lunæ periodico, quod eſt 27 dies 7 hor. 43 min. calculari poteſt arcus, quem luna uno temporis minuto percurrit, qui arcus eſt 189000 pedum Pariſiens: hujus ſinus verſus per *Cor.* 1. *Prop.* 61. Geom. prodit $15\frac{1}{12}$ pedes, quod ſpatium luna vi gravitatis verſus terram deſcendit uno temporis minuto primo, & idem circiter eſt, per quod gravia prope terræ ſuperficiem unius minuti ſecundi tempore decidunt, ut *Prop.* 3. *Cor.* 3. demonſtratum eſt. Creſcunt enim vires centripetæ ſive gravitates in ratione diſtantiarum a centro terræ duplicata reciproce; quare & ſpatia, per quæ gravia deſcendunt, eadem ratione creſcunt. Igitur deſcenſus gravium in regionibus noſtris uno minuto primo eſt $60\times60\times15\frac{1}{12}$ pedes. Sed hoc ſpatium decreſcit in ratione duplicata temporis; ergo erit unius minuti ſecundi tempore $15\frac{1}{12}$ pedes, vel accuratius 15 ped. 1 dig. $1\frac{7}{9}$ lin.

Prop. XLII. Satellites Jovis gravitant in Jovem, Saturni in Saturnum, & omnes Planetæ circumſolares in ſolem, & vi gravitatis ſuæ retrahuntur ſemper a motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retinentur. Nam revolutiones ſatellitum Jovis circa Jovem, Saturni circa Saturnum, Mercurii, Veneris, reliquorumque Planetarum circa ſolem, ſunt phænomena ejuſdem generis cum revolutione lunæ circa terram, & propterea a cauſis ejuſdem generis dependent: præſertim cum demonſtratum ſit, quod vires, a quibus revolutiones illæ dependent, reſpiciant centra Jovis, Saturni & Solis, ac recedendo a Jove, Saturno & ſole decreſcant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decreſcit in receſſu a terra.

Coroll. 1. Gravitas igitur datur in planetas univerſos, nam ſunt omnes corpora ejuſdem generis. Et cum attractio omnis per motus legem tertiam mutua ſit; Jupiter in ſatellites ſuos omnes, Saturnus in ſuos, terraque in lunam, & ſol in planetas omnes gravitabit.

Coroll. 2. Hinc Jupiter & Saturnus prope conjunctionem ſe invicem attrahendo ſenſibiliter perturbant motus mutuos, ſol perturbat motus

motus lunares, ſol & luna perturbant mare noſtrum, ut in ſequentibus explicabitur.

Coroll. 3. Gravitas, quæ planetam unumquemque reſpicit, eſt in ratione diſtantiæ a centro ejus duplicata reciproce.

Prop. XLIII. Corpora omnia in planetas ſingulos gravitant, & pondera eorum in eundem quemvis planetam, paribus diſtantiis a centro planetæ, proportionalia ſunt quantitati materiæ in ſingulis. Deſcenſus gravium omnium prope ſuperficiem terræ in vacuo (demta inæquali retardatione quæ ab aëris reſiſtentia oritur) æqualibus temporibus fieri, obſervationibus conſtat. Jam vero naturam gravitatis in cætera corpora cœleſtia eandem eſſe, atque in terram, non eſt dubium. Quare deſcenſus gravium in eadem, in iiſdem diſtantiis, æqualibus temporibus fiunt. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora. Porro Jovis & ejus ſatellitum pondera in ſolem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum, patet ex motu ſatellitum quam maxime regulari. Nam ſi horum aliqui velocius traherentur in ſolem pro quantitate materiæ ſuæ, quam cæteri: Motus ſatellitum per *Coroll.* 2. *Prop.* 22. ex inæqualitate attractionis ſenſibiliter perturbarentur, & eorum eccentricitates forent ſenſibiles. Sed orbes ſatellitum ſunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & ſatellitum in ſolem æquantur inter ſe, & pondera eorum materiæ quantitati ſunt proportionalia. Idem de cæteris planetis valet.

Coroll. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari poſſent, forent majora vel minora pro varietate formarum in æquali materia: omnino contra experientiam.

Coroll. 2. Si æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino deſtitueretur, vel pro quantitate materiæ ſuæ minus gravitaret; & idem ex mente *Ariſtotelis*, *Carteſii* & aliorum, nonniſi forma ab aliis corporibus differret; penderent pondera a formis corporum, poſſentque cum formis mutari, contra *Coroll.* 1.

Coroll. 3. Spatia omnia non ſunt æqualiter materia gravitante plena. Nam ſi ita eſſent, gravitas ſpecifica fluidi, quo regio aëris impleretur, ob ſummam materiæ denſitatem, nil cederet gravitati ſpecificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuſcunque denſiſſimi; & propterea nec aurum, nec aliud quodcunque corpus, in aëre deſcendere poſſet.

Coroll. 4. Datur ergo vacuum, materia gravitante.

Coroll. 5. Vis gravitatis diverſi eſt generis a vi magnetica. Nam vis magnetica non omnia corpora afficit, nec materiæ quantitati eſt proportionalis, nec decreſcit in ratione diſtantiæ duplicata, ſed fere triplicata, quantum ex craſſis quibuſdam obſervationibus animadverti potuit. *Prop.*

Prop. XLIV. Gravitas in corpora universa fit, eaque proportionalis est quantitati materiæ in singulis. Planetas omnes in se mutuo graves esse probatum est. Porro cum planetæ cujusvis *A* partes omnes graves sint in planetam *B*, & gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio æqualis sit; planeta *B* in partes omnes planetæ *A* vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. Nec obstat quod hæc gravitas corporum, quæ palpamus, in se mutuo non sentiatur: Nam hæc gravitas in se mutuo ad gravitatem in terram totam longe minor est, quam quæ sentiri possit.

Prop. XLV. Si globorum duorum in se mutuo gravitantium materia undique in regionibus, quæ a centris æqualiter distant, homogenea sit: Erit pondus globi alterutrius in alterum reciproce, ut quadratum distantiæ inter centra. Constat per *Prop.* 34.

Prop. XLVI. *Problema.* Invenire pondera corporum in diversas planetas?

Per *Propositio* 8. Liquet, vires centripetas esse in ratione composita ex ratione radiorum directe, & ratione duplicata temporum periodicorum inverse; quodsi igitur corpora sunt æqualia, pondera eorum in planetas, circa quos revolvuntur, sunt in eadem ratione. Hæc pondera augentur, ubi corpora propius ad planetas conſtituuntur, aut diminuuntur, ubi longius ab eis removentur, & ſunt in diverſis diſtantiis in ratione diſtantiarum duplicata inverſe. Sic ex temporibus periodicis Veneris circum ſolem, dierum 224 & horarum $16\frac{1}{4}$. Satellitis extimi circumjovialis circum Jovem, dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$. Satellitis Hugeniani circum Saturnum, dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & lunæ circum terram, dierum 27 hor. 7 min. 43. collatis cum diſtantia mediocri Veneris a ſole, & cum elongationibus maximis heliocentricis ſatellitis extimi circumjovialis a centro Jovis 8′, 16″. Satellitis Hugeniani a centro Saturni 3′, 4″, & lunæ a centro terræ 10′, 33″, computum ineundo invenit Autor, quod corporum æqualium, & a centro ſolis, Jovis, Saturni & Terræ æqualiter diſtantium, pondera ſint in ſolem, Jovem, Saturnum & Terram, ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$, reſpective; & pondera æqualium corporum in ſolem, Jovem, Saturnum ac Terram in diſtantiis 10000, 997, 791 & 109 ab eorum centris, atque ideo in eorum ſuperficiebus, ut 10000, 943, 529, 435, reſpective.

Scholium. Qua ratione Autor eximius computum ſuum inierit, mihi quidem ignotum eſt; nam qui calculis meis prodierunt numeri, ab Autoris numeris aliquantum differunt. En vero methodum meam calculandi. Radios orbitarum ſatellitum per tangentes angulorum elongationis heliocentricæ eorundem exprimendo, inveni rationem radii orbitæ

Satel-

Satellitis extimi Jovis ad rad. orbit. Jov. ut	24.046	ad 10000.
Satell. Hugen. ad rad. Orb. Sat. ut	8.921	
Lunæ ad radium Orb. Vener. ut	42.426	

Tempus periodicum

Satel. Jov. ad temp. per.	Jov.	ut 1 ad	259. 63
Satel. Hugen. ad	Sat.		674. 81
Lunæ ad	Ven.		8.221.

Ex his datis rationem ponderum in æqualibus distantiis hoc modo inveni. Sit radius satellitis ad radium planetæ primarii ut a ad b; & tempus periodicum illius ad tempus periodicum hujus ut 1 ad c; erit pondus in planetam primarium ad pondus in solem in æquali distantia, ut $\frac{a \times aa}{1 \times bb}$ ad $\frac{b}{cc}$, sive ut $a^3 \times cc$ ad b^3. Secundum hanc regulam pondus in Jovem est ad pondus in solem, ut 24.046 cub. × 259.63 quad. ad 10000 cub.

Log. 24.046 cub.	4.1401284	
Log. 259. 63 quad.	4.8287098	
	8.9688382	auferatur
hic a Log. 10000 cub.	12.0000000	
	3.0311618	hujus Logarithmi

garithmi correſpondens numerus eſt 1074. Eſt ergo pondus in ſolem ad pondus in Jovem ut 1 ad $\frac{1}{1074}$. Eadem methodo pondus in ſolem ad pondus in Saturnum & Terram inveni ut 1 ad $\frac{1}{3093}$ & $\frac{1}{193755}$ reſpective.

Coroll. 1. Innoteſcit etiam quantitas materiæ in planetis ſingulis. Nam hæ ſunt ut vires, quibus corpora æqualia in æqualibus diſtantiis ad centra eorum trahuntur, ideoque ut ipſa pondera. Si parallaxis ſolis diurna ſtatuatur major vel minor, quam 10″, 30‴. debebit quantitas materiæ in terra augeri vel minui in triplicata ratione. Nam per parallaxin ſolis diurnam, quæ ſemidiametro Terræ apparenti heliocentrico, hoc eſt, ex centro ſolis ſpectato, æquatur, Terræ ſemidiameter innoteſcit. Creſcit vero vel decreſcit ſolidum ſphæræ in ratione triplicata ſemidiametri ejus creſcentis aut decreſcentis, per *Coroll.* 4. *Prop.* 30. Geom.

Coroll. 2. Innoteſcunt etiam denſitates planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras homogeneas ſunt in ſuperficiebus ſphærarum, ut ſphærarum diametri per *Prop.* 32. Ideoque ſphærarum heterogenearum denſitates ſunt ut pondera illa applicata ad ſphærarum diametros. Erant autem veræ ſolis, Jovis, Saturni ac terræ diametri ad invicem, ut 10000, 997, 791 & 109, & pondera in eoſdem ſecundum Autoris computum ut 10000, 943, 529 & 435 reſpective, & propterea denſitates ſunt ut 100, 94½, 67 &

400.

400. Densitas terræ, quæ prodit ex hoc computo, non pendet a parallaxi solis, sed determinatur per parallaxin lunæ, & propterea hic recte definitur. Est igitur sol paulo densior quam Jupiter, & Jupiter quam Saturnus, & Terra quadruplo densior quam sol. Nam per ingentem suum calorem sol rarescit. Luna vero densior est quam Terra, ut in sequentibus patebit.

Coroll. 3. Densiores igitur sunt planetæ qui sunt minores, cæteris paribus. Sic enim vis gravitatis in eorum superficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & densiores sunt planetæ, cæteris paribus, qui sunt soli propiores; ut Jupiter Saturno, & terra Jove. In diversis utique distantiis a sole collocandi erant Planetæ, ut quilibet pro gradu densitatis calore solis majore vel minore frueretur. Aqua nostra, si Terra locaretur in orbe Saturni, rigesceret; si in orbe Mercurii, in vapores statim abiret. Nam lux solis, cui calor proportionalis est, septuplo densior est in orbe Mercurii quam apud nos, & thermometro expertus est Autor, quod septuplo solis æstivi calore aqua ebullit. Dubium vero non est, quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea densior sit hac nostra; cum materia omnis densior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

Prop. XLVII. Gravitas pergendo a superficiebus planetarum deorsum decrescit in ratione distan-

distantiarum a centro quam proxime. Si materia planetæ quoad densitatem uniformis esset, obtineret hæc propositio accurate, per *Prop.* 32. Error igitur tantus est, quantus ab inæquali densitate oriri potest.

Prop. XLVIII. Motus planetarum in cœlis diutissime conservari potest. Nam cum motus eorum a resistentia medii, in quo moventur, retardetur, hæc vero tam exigua sit, ut percipi non possit; retardatio motus planetarum in multis annorum seculis nullatenus erit sensibilis. Supponatur enim cœlorum vastissima spatia aëre repleri. Hic Autoris computo in altitudine ducentorum milliarium supra Terram, si atmosphæra eousque extenderetur, foret rarior quam ad superficiem Terræ, in ratione 75000000000000 ad 1 circiter. Et hinc stella Jovis in medio ejusdem densitatis cum aëre illo superiore revolvendo tempore annorum 1000000 ex resistentia medii non amitteret motus sui partem decimam centesimam millesimam. Nec radiorum lucis, quibus spatia hæc replentur, resistentiam hactenus sensibilem experientia comprobavit.

Prop. XLIX. Sol motu perpetuo agitatur, sed nunquam longe recedit a communi gravitatis centro planetarum omnium. Nam cum materia in sole sit ad materiam in Jove, ut 1067 ad 1, & distantia Jovis a sole sit ad semidiametrum solis in ratione paulo majore; incidet commune centrum gravitatis Jovis & solis in punctum

punctum paulo supra superficiem solis. Eodem argumento cum materia in sole sit ad materiam in Saturno, ut 3021 ad 1, & distantia Saturni a sole sit ad semidiametrum solis in ratione paulo minore: Incidet commune centrum gravitatis Saturni & solis in punctum paulo infra superficiem solis. Et ejusdem calculi vestigiis insistendo, si Terra & Planetæ omnes ex una solis parte consisterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra solis diametro a centro solis distaret: Aliis in casibus distantia centrorum semper minor est. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quiescit, sol pro vario planetarum situ in omnes partes movebitur, sed a centro illo nunquam longe recedet.

Prop. L. Planetæ moventur in ellipsibus umbilicum habentibus in centro solis, & radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales. Nam cum pondera planetarum augeantur vel diminuantur, quo propius ad solem accedunt, aut longius ab eo recedunt, sintque ut quadrata distantiarum reciproce; si sol quiesceret, & planetæ non agerent in se mutuo; forent orbes eorum elliptici, per *Prop.* 11. *Coroll.* 2. & areæ describerentur temporibus proportionales, per *Prop.* 4. Actiones autem planetarum in se mutuo perexiguæ sunt, & motus planetarum in ellipsibus circa solem mobilem minus perturbant, per *Prop.* 23.

quam

quam si motus isti circa solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non est omnio contemnenda. Nam gravitas in Jovem est ad gravitatem in solem (paribus distantiis ut 1 ad 1067; ideoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam distantia Saturni a Jove est ad distantiam Saturni a sole fere, ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in solem, ut $\frac{1}{16}$ ad $\frac{1067}{81}$, hoc est, ut 81 ad 16×1067, seu 1 ad 211 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis Saturni in singulis Planetæ hujus cum Jove conjunctionibus adeo sensiblis, ut ad eandem Astronomi hæreant. Pro vario situ Planetæ in his conjunctionibus eccentricitas ejus nunc augetur, nunc diminuitur, Aphelium nunc promovetur, nunc forte retrahitur, & medius motus per vices acceleratur & retardatur. Error tamen omnis in motu ejus circa solem a tanta vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari fere potest constituendo umbilicum inferiorem orbis ejus in communi centro gravitatis Jovis & Solis, per *Prop.* 24. & propterea ubi maximus est, vix superat duo minuta prima. Et error maximus in motu medio vix superat minuta duo prima annuatim. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices solis in Saturnum, Jovis in Saturnum, & Jovis in solem (ratione distantiarum Saturni a sole, Saturni a Jove, & Jovis a sole, existente ut 9,

4&

4 & 5) ut $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{16}$ & $\frac{3021}{25}$, hoc eſt, ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ ſeu 156609, ideoque differentia gravitatum ſolis in Saturnum, & Jovis in Saturnum, eſt ad gravitatem Jovis in ſolem, ut 65 ad 156609, ſeu ut 1 ad 2409. Huic autem differentiæ proportionalis eſt maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis Jovialis longe minor eſt quam ea Saturnii. Reliquorum orbium perturbationes ſunt adhuc longe minores, præterquam quod orbis terræ ſenſibiliter perturbatur a luna. Commune centrum gravitatis terræ & lunæ, ellipſin circum ſolem in umbilico poſitum percurrit, & radio ad ſolem ducto areas in eadem temporibus proportionales deſcribit; terra vero circum hoc centrum commune motu menſtruo revolvitur.

Prop. LI. Orbium Aphelia & Nodi quieſcunt. Aphelia quieſcunt per *Prop.* 11. *Cor.* 2. ut & orbium plana per *Prop.* 4. & quieſcentibus planis quieſcunt nodi. Attamen a Planetarum revolventium & Cometarum actionibus in ſe invicem orientur inæqualitates aliquæ in Saturno & Jove non contemnendæ. Planetæ ſoli propiores, nempe Mercurius, Venus, Terra & Mars ob corporum parvitatem parum agunt in ſe invicem, ideoque aphelia eorum & nodi quieſcunt, niſi quatenus a viribus Jovis, Saturni

turni & Cometarum turbentur. Et inde colligi potest per theoriam gravitatis, quod horum aphelia moventur aliquantulum in consequentia respectu fixarum, idque in proportione sesquiplicata distantiarum horum Planetarum a sole. Ut, si aphelium Martis in annis centum conficiat 33′, 20″, in consequentia respectu fixarum; Aphelia terræ, Veneris & Mercurii in annis centum conficient 17′. 40,″ 10′. 53″ & 4′. 16″, respective.

Prop. LII. Planetarum motus diurni uniformes sunt, & libratio lunæ ex ipsius motu diurno oritur. Patet per motus legem primam, estque observationibus conforme. Sol *utique* respectu fixarum revolvitur diebus 25½. Jupiter revolvitur horis 9, 56′ Mars horis 24, 39′. Venus horis 23 circiter, ut ex motu macularum horum Planetarum concluditur, terra horis 23, 56′, & luna diebus 27, 7 hor. 43′. Maculæ in corpore solis moventur ab occidente in orientem & ad eundem situm in *disco* solis redeunt diebus 27½ circiter respectu terræ, ideoque respectu fixarum sol revolvitur diebus 25½. Nam quoniam terra interea temporis, quod sol circa axem suum revolvitur, in orbe suo progrediatur; sol licet respectu fixarum redeat ad priorem situm, non redibit tamen respectu terræ, sed ut redeat, diutius revolvi debet.

Lunam

Lunam ſpatio temporis dicto circa axem ſuum revolvi, ideoque diem ejus menſtruum eſſe, exinde patet, quod eandem ſemper faciem terræ obvertit. Librari tamen videtur, hoc eſt, modo aliquantulum faciei a nobis averſæ verſus orientem, modo ejus verſus occidentem ſitæ nobis obvertere videtur, quod inde oritur, quia facies ejus eadem ulteriorem umbilicum orbis ejus ſemper reſpicit quam proxime, & propterea pro ſitu umbilici illius deviat hinc inde a terra. Hæc eſt libratio lunæ in longitudinem: nam libratio in latitudinem, ſive in ſeptentrionem & meridiem, ex latitudine lunæ & inclinatione axis ejus ad planum eclipticæ oritur. Simili motu extimus Saturni ſatelles circa axem ſuum revolvi videtur, eadem ſui facie Saturnum perpetuo reſpicens. Nam circa Saturnum revolvendo, quoties ad orbis ſui partem orientalem accedit, ægerrime videtur, & plerumque videri ceſſat, id quod evenire poteſt per maculas quaſdam in ea corporis parte, quæ terræ tunc obvertitur, ut *Caſſinus* notavit. Simili etiam motu ſatelles extimus Jovialis circa axem ſuum revolvi videtur, propterea quod in parte corporis Jovi averſa maculam habeat, quæ tanquam in corpore Jovis cernitur ubicunque ſatelles inter Jovem & oculos noſtros tranſit.

Prop. LIII. Axes Planetarum diametris, quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur, minores ſunt. Planetæ, ſublato omni motu circulari, diurno figuram sphæricam ob æqualium undique partium gravitatem affectare deberent. Per motum illum circularem fit, ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem ascendere conentur. Ideoque materia, si fluida sit, ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit, axem vero descensu suo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (consentientibus Astronomorum observationibus) brevior deprehenditur inter polos, quam ab oriente in occidentem. Eodem argumento, nisi terra nostra paulo altior esset sub æquatore quam ad Polos, maria ad Polos subsiderent, & juxta æquatorem asendendo ibi omnia inundarent.

Lemma. Supponatur, semicirculam *A E D B* (Fig. 51.) circa diametrum *A C B* circumrotari, & ducatur radius *C D*, eique parallela ordinata *E F*, utraque ad diametrum *A B* perpendicularis; dico vim centrifugam puncti *D*, esse ad vim centrifugam puncti *E*, in ratione duplicata radii *C D* ad ordinatam *E F*, quæ est sinus complementi arcus *E D*.

Concipiatur enim, radium *DC* circum rotando describere circulum *DCd*, & radium *EC* superficiem conicam *CEFe*, utrumque autem radium eadem velocitate moveri, sitque vis centrifuga puncti *D* æqualis *Du*, & fiat ei æqualis *E x*, ducatur etiam ex *x* perpendicularis *x y* ad *E F*; & erit *E y* vis centrifuga puncti *E*. Est vero *E y* ad *E x*, ut *D C* sive *E C* ad *E F*, propter similitudinem triangulorum *E C F* & *E x y*.

Sed.

Sed velocitas puncti *D*, est ad velocitatem puncti *E*, cum semicirculus *A E D B* circum axem suum *A B* circumvolvi supponitur, ut circumferentia circuli *D C d* ad circumferentiam circuli *E F e*, hoc est, ut radius *D C* ad radium *E F*. Ideoque hæc ratio priori & huic æquali est addenda; & erit ratio ex hisce duabus composita, duplicata radii *D C* ad sinum *E F*; quæ est ratio vis centrifugæ puncti *D* ad vim centrifugam puncti *E*. *Q. E. D.*

Prop. LIV. *Problema.* Invenire proportionem axis Planetæ ad diametros eidem perpendiculares?

Piccardus metiendo arcum gradus unius & 22′, 55″, in meridiano inter *Ambianum* & *Malvoisinam*, invenit arcum gradus unius esse hexapedarum Parisiensium 57060.

Cassinus senior mensus est distantiam in meridiano a villa *Collioure* in *Roussillon* ad observatorium Parisiense: & filius ejus addidit distantiam ab observatorio ad turrem urbis *Dunkirk*. Distantia tota erat hexapedarum $486156\frac{1}{2}$, & differentia latitudinum villæ *Collioure* & urbis *Dunkirk* erat graduum 1 & 31′, $11''\frac{1}{6}$. Unde arcus gradus unius prodit hexapedarum Paris. 57061. Et ex his mensuris colligitur ambitus terræ pedum Paris. 123249600, & semidiameter ejus pedum 19615800, ex hypothesi, quod terra sit sphærica.

In latitudine *Lutetiæ* Parisionum corpus grave tempore minuti unius secundi cadendo describit pedes Parisienses 15 dig. 1 lin. $1\frac{7}{9}$ per *Prop.* 3 *Cor.* 3. hoc est, lineas $2173\frac{7}{9}$. Pondus corporis diminuitur per pondus aëris ambientis. Ponamus, pondus amissum esse partem undecimam millesimam ponderis totius ; & corpus illud grave cadendo in vacuo describet altitudinem linearum 2174. tempore minuti unius secundi.

Corpus in circulo ad distantiam pedum 19615800 a centro singulis diebus sidereis horarum 23. 5′6, 4″. uniformiter revolvens tempore minuti unius secundi describet arcum pedum 1433,46, cujus sinus versus est pedum 0.0523656, seu linearum 7,54064. Ideoque vis, qua gravia descendunt in latitudine *Lutetiæ*, est ad vim centrifugam corporum in æquatore a terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064. Vis centrifuga corporum in æquatore terræ est ad vim centrifugam, qua corpora directe tendunt a terra in latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50′ 10″. quæ est in fig. 51. arcus *E D*) in duplicata ratione radii *CD* ad sinum complementi latitudinis illius *E F*, per *Lem.* præced. id est, ut 7,54064 ad 3,267, Addatur hæc vis ad vim, qua gravia discendunt in latitudine illa *Lutetiæ* ; & corpus in latitudine illa vi tota gravitatis cadendo, tempore minuti unius secundi describet lineas 2177, 267, seu pedes Paris. 15. dig. 1 & lin. 5. 267. Et vis

tota

tota gravitatis in latitudine illa erit ad vim centrifugam corporum in æquatore terræ ut 2177.267 ad 7.54064 ſeu ut 289 ad 1.

Unde ſi *AP BQ* (Fig. 52.) figuram terræ deſignet jam non amplius ſphæricam, ſed revolutione ellipſeos circum axem minorem *PQ* genitam, ſitque *ACQqca* canalis aquæ plena, a polo *Q* ad centrum *C*, & inde ad æquatorem *A* pergens: debebit pondus aquæ in canalis crure altero *ACca* eſſe ad pondus aquæ in crure altero *QCcq* ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam e ponderis partibus 289 ſuſtinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure ſuſtinebit reliquas. Porro ſi axis *PQ* ad diametrum *AB* eſſet ut 100 ad 101; per *Prop.* 37. *Coroll.* gravitas in loco *Q* in terram foret ad gravitatem in eodem loco *Q* in ſphæram centro *C* radio *PC* vel *QC* deſcriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco *A* in Sphæroidem, convolutione ellipſeos *APBQ* circa axem *AB* deſcriptam eſt ad gravitatem in eodem loco *A* in ſphæram circumvolutione circuli *ApBr* circa axem *AB* deſcriptam, ut 125 ad 126. Eſt autem gravitas in loco *A* in terram media proportionalis inter gravitates in dictam ſphæroïdem & ſphæram: propterea quod ſphæra diminuendo diametrum *pr* in ratione 101 100 vertitur in figuram terræ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam *C*, quæ diametris duabus *AB*, *PQ*, perpendicularis eſt, vertitur in dictam ſphæroïdem;

& gravitas in *A* in caſu utroque diminuitur in eadem ratione quam proxime. Eſt igitur gravitas in *A* in ſphæram centro *C* radio *AC* deſcriptam ad gravitatem in *A* in terram, ut 126 ad $125\frac{1}{2}$. Et gravitas in loco *Q* in ſphæram *α P β Q* eſt ad gravitatem in loco *A* in ſphæram *A p B r* in ratione diametrorum per *Prop.* 32. id eſt ut 100 ad 101. Conjungantur jam hæ tres rationes 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$ & 100 ad 101; & fiet gravitas in loco *Q* in Terram ad gravitatem in loco *A* in terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, ſeu ut 501 ad 500. Jam cum gravitas in canalis crure utrovis *A C c a* & *Q C c q* ſit ut diſtantia locorum a centro Terræ; ſi crura illa ſuperficiebus tranſverſis & æquidiſtantibus diſtinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium ſingularum in crure *A C c a* ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim, id eſt, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc eſt, ut 505 ad 501. Ac proinde ſi vis centrifuga partis cujuſque in crure *A C c a* ex motu diurno oriunda fuiſſet ad pondus partis ejuſdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujuſque, in partes 505 diviſo, partes 4 detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum conſiſteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujuſque eſt ad pondus ejuſdem ut 1 ad 289, hoc eſt, vis centrifuga quæ deberet eſſe ponderis pars $\frac{4}{505}$, eſt tantum pars $\frac{1}{289}$. Et prop-

propterea secundum regulam auream, quodsi vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure *A c c a* superet altitudinem aquæ in crure *Q C c q* parte centesima totius altitudinis; vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut excessus altitudinis in crure *A C c a* sit altitudinis in crure altero *Q C c q* pars tantum $\frac{1}{229}$. Est igitur diameter Terræ secundum æquatorem ad ipsius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum Terræ semidiameter mediocris juxta mensuram *Piccardi* sit pedum Paris. 19615800; Terra altior erit ad æquatorem quam ad polos, excessu pedum 85472, seu milliarium $17\frac{1}{10}$ (quorum quodvis continet 5000 pedes Paris.) & altitudo ejus ad æquatorem erit 19658600, & ad polos 19573000 pedum circiter.

Secundum hanc diametrorum Terræ rationem ad se invicem Autor rationes ponderum in diversis latitudinis gradibus, eisque proportionales pendulorum longitudines, æqualibus temporibus oscillantium, computando, earumque differentias cum observationibus D. *Richeri*, D. *Halleii* aliorumque comparando, invenit, illas hisce paulo minores esse. Sunt enim incrementa ponderum, pergendo ab æquatore ad polos, ut quadrata sinuum rectorum latitudinis quam proxime, & in eadem circiter ratione augentur arcus graduum latitudinis in meridiano. Igitur incrementum longitudinis penduli in latitudine *Lutetiæ* 48°, 50′. supra illam in æquatore est 2295667 — 2290000, hoc est

1.087 lin. Et D. *Richer* pendulum in insula *Cayennæ*, cujus latitudo est 4°, 55′, cum pendulo Paris: comparando invenit illud 1¼ lin. hocce brevius. Sed secundum Autoris computum differentia longitudinis penduli in latitudine Parisf. ab ea in latitudine insulæ *Cayennæ* est 1.049. lin. Terram igitur, concludit Autor, sub æquatore altiorem esse, quam pro superiori calculo, & densiorem ad centrum, quam in fodinis prope superficiem. Nam, ut recte Cl. *Whistonius* observavit, si materia ad centrum redundans, qua densitas ibi major redditur, subducatur & seorsim spectetur; gravitas in Terram reliquam uniformiter densam erit ut distantia ponderis a centro, in materiam vero redundantem, reciproce ut quadratum distantiæ a materia illa quam proxime. Gravitas igitur sub æquatore minor erit, quam pro calculo præcedente: Nisi forte, ut Autor addit, calores in Zona torrida longitudinem pendulorum aliquantum auxerint. Nam virgam ferream pedes tres longam tempore hyberno in Anglia breviorem esse, quam tempore æstivo, sexta parte lineæ unius, ipse observavit.

Si Planeta major sit vel minor quam Terra, manente ejus densitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ circa axem suum; manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem. At si motus diurnus in ratione qua-

quacunque acceleretur vel retardetur; augebitur vel diminuetur vis centrifuga (quæ per *Defin.* 13. semper sinui verso arcus quam minimi eodem tempore descripti est proportionalis) per *Lem. Prop.* 7. in duplicata illa ratione & propterea differentia diametrorum augebitur vel diminuetur in eadem duplicata ratione quam proxime. Et si densitas planetæ augeatur vel minuatur in ratione quavis, gravitas etiam in ipsum tendens augebitur vel minuetur in eadem ratione, & differentia diametrorum vicissim minuetur in ratione gravitatis auctæ vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cum terra respectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, (qui dies sydereus dicitur) Jupiter autem horis 9, 56′, sintque temporum quadrata, ut 29 ad 5, & revolventium densitates, ut 400 ad $94\frac{1}{2}$, & differentia diametrorum Terræ $\frac{1}{229}$: Differentia diametrorum Jovis erit ad ipsius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ ad 1, hoc est, ut $\frac{11600}{108202\frac{1}{2}}$ ad 1, sive ut 1 ad $9\frac{1}{3}$ quam proxime. Est igitur diameter Jovis ab oriente in occidentem ducta ad ejus diametrum inter polos ut $10\frac{1}{3}$ ad $9\frac{1}{3}$ quam proxime. Unde cum ejus diameter major sit 37″, ejus diameter minor, quæ polis interjacet, erit 33″, 25‴. Pro luce erratica addantur 3″ circiter, & hujus

Planetæ

Planetæ diametri apparentes evadent 40″ & 36″, 25‴. quæ sunt ad invicem ut $11\frac{1}{6}$ ad $10\frac{1}{6}$ quam proxime. Hoc ita se habet ex hypothesi quod corpus Jovis sit uniformiter densum. At si corpus ejus sit densius versus planum æquatoris quam versus polos, diametri ejus possunt esse ad invicem ut 12 ad 11 vel 13 ad 12 vel forte 14 ad 13. Et Cassinus quidem *A.* 1691. observavit, quod Jovis diameter ab oriente in occidentem porrecta diametrum alteram superaret parte sui circiter decima quinta.

D. *Pound* autem telescopio pedes 123 longo, & optimo micrometro instructo, diametros Jovis A. 1719. mensus est ut sequitur:

Tempora.			*Diam. max.*	*Diam. min.*	*Diam. ad invic.*		
	dies	hor.	part.	part.			
Jan.	28,	6	13, 40	12, 28	ut 12	ad	11
Mart.	6,	7	13, 12	12, 20	$13\frac{3}{4}$		$12\frac{3}{4}$
Mart.	9,	7	13, 12	12, 08	$12\frac{2}{3}$		$11\frac{2}{3}$
Apr.	9,	9	12, 32	11, 48	$14\frac{1}{2}$		$13\frac{1}{2}$

Congruit igitur theoria cum phænomenis. Nam Planetæ magis incalescunt ad lucem solis versus æquatores suos, & propterea paulo magis ibi decoquuntur, quam versus polos.

Prop. LV. Puncta æquinoctialia regrediuntur, & axis terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinatur in eclipticam, & bis redit ad positionem priorem. Patet per *Prop.* 27.

28. *Cor.* 6. Motus tamen iste nutandi perexiguus esse debet,& vix aut ne vix quidem sensibilis.

Prop. LVI. Motus omnes lunares omnesque motuum inæqualitates ex allatis principiis consequuntur. Planetas majores, interea dum circa solem feruntur,posse alios minores circum se revolventes Planetas deferre, & minores illos in ellipsibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere, patet per *Prop.* 22. Actione autem solis perturbabuntur eorum motus multimode, iisque afficientur inæqualitatibus, quæ in luna nostra notantur. Hæc utique velocius movetur, ac radio ad Terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvum, atque ideo propius accedit ad Terram, in Syzigiis quam in quadraturis, nisi quatenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima est per *Prop.* 26. *Cor.* 2. ubi apogæum lunæ in Syzigiis versatur, & minima, ubi in quadraturis consistit; & inde luna in perigæo velocior est & nobis propior, in apogæo autem tardior & remotior, in Syzigiis quam in quadraturis. Progreditur insuper apogæum, & regrediuntur nodi, sed motu inæquabili. Et apogæum quidem per *Prop.* 26. velocius progreditur in Syzigiis suis, tardius regreditur in quadraturis, & excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem per *Prop.* 27. quiescunt in Syzigiis suis

&

& velocissime regrediuntur in quadraturis. Sed & major est lunæ latitudo maxima in ipsius quadraturis quam in Syzigiis, per *Prop.* eand. & motus medius lunæ, tardior in perihelio Terræ quam in ipsius aphelio, per *Prop.* 25. *Cor.* 4. Atque hæ sunt inæqualitates insigniores ab Astronomis notatæ. Sunt etiam aliæ quædam a prioribus Astronomis non observatæ inæqualitates, quibus motus lunares adeo perturbantur, ut nulla hactenus lege ad regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim seu motus horarii apogæi & nodorum lunæ & eorundem æquationes, ut & differentia inter eccentricitatem maximam in Syzigiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas, quæ variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim per *Prop.* 28. *Coroll.* 1. in triplicata ratione diametri apparentis solaris. Et variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proxime, per *Coroll. Prop.* 1. & *Coroll.* 2. *Prop.* 28. Sed hæc inæqualitas in calculo Astronomico ad Prosthaphæresin Lunæ referri solet, & cum ea confundi.

Coroll. Motus medius nodorum satellitis extimi Jovialis est ad motum medium nodorum Lunæ nostræ in ratione composita ex ratione duplicata temporis periodici terræ ad tempus periodicum Jovis circa solem, & ratione simplici temporis periodici satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram, per

per *Coroll.* 2. *Prop.* 28. ideoque annis centum conficit nodus 8 gr. 24'. in antecedentia, ut ex calculo sequenti apparet.

Tempus periodicum Terræ circa solem est dierum 365. 2565, & Jovis dierum 4332. 514. Tempus periodicum satellitis extimi circa Jovem est dierum 16. 688, & Lunæ circa Terram, dierum 27. 321.

Log. 365.2565 quad.	5.1251956.	L. 4332.514 quad.	7.2734600
Log. 16.6880	1.2224043.	L. 27.321	1.4364966
	6.3475999	auferatur hic ab	8.7099566
	8.7009566		
	2.3623567		

hujus Logarithmi numerus est 230. 38. Est igitur motus nodorum satellitis extimi Jovis motus nodorum Lunæ pars 230ma circiter. Est vero motus nodorum lunæ annuus 19. gr. 21', 21''. multiplicetur hic per 100. & dividatur factum per 230, & prodibit motus nodorum satellitis centennalis 8 gr. 24 min.

Motus medii nodorum satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus, per idem *Coroll.* Motus autem augis sive lineæ absidum, per apogæum & perigæum transeuntis, satellitis cujusque in consequentia est ad motum nodorum ipsius in antecedentia, ut motus apogæi Lunæ nostræ ad hujus motum nodorum, per idem *Coroll.* & inde datur. Diminui tamen

tamen debet motus augis sic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob causam, quam Autor non exponit. Variatio satellitis e Jove spectati est ad variationem Lunæ, ut sunt ad invicem toti motus nodorum temporibus, quibus satelles & Luna ad Solem revolvuntur; seu potius in ratione motus nodorum Lunæ ad motum nodorum satellitis annuum & temporis periodici Lunæ ad tempus periodicum satellitis. Nam si a ratione errorum angularium, id est, variationum, aufertur ratio temporum periodicorum, habetur ratio motus nodorum; ergo vice versa, si rationi motus nodorum additur ratio temporum periodicorum, habetur ratio variationum. Id quod ex computo sequenti elucet.

Motus nodorum Lunæ annuus est 69681″, satellitis extimi Jovialis 302″. tempus periodicum Lunæ est dier. 27. 321. & satellitis dicti d. 16.688.

Log. 69681″.	4.8431144	L. 302″.	2.4800069
Log. d. 27.321.	1.4364966	L. d. 16.688.	1.2224043
	6.2796110		
	3.7024112		
	2.5771998		

hujus Logarithmi numerus est 377.74. Ergo variatio satellitis est pars 377^{ma} variationis Lunæ. Variatio Lunæ maxima in apogæo Solis est 33′, 14″. secundum Autoris calculum

sive

ſive 1994″, horum pars 377ma eſt 5″, 17‴, qui numerus ab Autoris 5 tantum tertiis differt.

Prop. LVII. Fluxus & refluxus maris ab actionibus ſolis & lunæ, ſive gravitationibus oceani in ſolem & lunam, oriuntur. Mare ſingulis diebus tam lunaribus quam ſolaribus bis intumeſcere ac bis defluere, patet per *Cor.* 4. *Prop.* 28. ut & aquæ maximam altitudinem in maribus profundis & liberis, appulſum luminarium ad meridianum loci, minori quam ſex horarum ſpatio ſequi, uti fit in maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & promontorium *Bonæ Spei*, ut in maris *Pacifici* littore *Chilenſi* & *Peruviano:* in quibus omnibus littoribus æſtus in horam circiter ſecundam, tertiam vel quartam, incidit, niſi ubi motus ab oceano profundo per loca vadoſa propagatus uſque ad horam quintam, ſextam, ſeptimam, aut ultra retardatur. Horæ numerantur ab appulſu luminaris utriuſque ad meridianum loci, tam infra horizontem, quam ſupra, & per horas diei lunaris intelligendæ ſunt vigeſimæ quartæ partes temporis, quo luna motu apparente diurno ad meridianum loci revertitur. Vis ſolis & lunæ ad mare elevandum maxima eſt in ipſo appulſu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impreſſa manet aliquandiu, & per vim novam ſubinde impreſſam augetur, donec mare ad altitudinem maximam aſcenderit, id quod fiet ſpatio horæ unius,

unius, duarumve, sed sæpius ad littora spatio horarum trium circiter vel etiam plurium si mare sit vadosum.

Motus autem bini, quos luminaria duo excitant non cernentur distincte, sed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In quadraturis sol attollet aquam ubi luna deprimit, deprimetque ubi luna attollit, & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam experientia teste major est effectus lunæ quam solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra Syzigias & quadraturas æstus maximus, qui sola vi lunari incidere semper deberet in horam tertiam lunarem, & sola solari in tertiam solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium, quod tertiæ lunari propinquus est; ideoque in transitu lunæ a Syzigiis ad quadraturas, ubi hora tertia solaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idq; maximo intervallo paulo post octantes lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam lunarem in transitu lunæ a quadraturis ad Syzigias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis fluviorum fluxus majores, cæteris paribus, tardius ad ἀκμὴν venient.

Pen-

Pendent autem effectus luminarium ex eorum distantiis a terra. In minoribus enim distantiis majores eorum sunt effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur sol tempore hiberno in perigæo existens majores edit effectus, efficitque ut æstus in Syzigiis paulo majores sint, & in quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æstivo, & luna in perigæo singulis mensibus majores ciet æstus, quam ante vel post dies quindecim, ubi in apogæo versatur. Unde fit, ut æstus duo omnino maximi in Syzigiis continuis se mutuo non sequantur.

Pendet etiam effectus utriusque luminaris ex ipsius declinatione seu distantia ab æquatore. Nam si luminare in Polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter sine actionis intensione & remissione, ideoq; nullam motus reciprocationem cieret. Igitur luminaria recedendo ab æquatore Polum versus effectus suos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æstus in Syzigiis solstitialibus, quam in æquinoctialibus. In quadraturis autem solstitialibus majores ciebunt æstus, quam in quadraturis æquinoctialibus; eo quod lunæ jam in æquatore constitutæ effectus maxime superat effectum solis. Incidunt igitur æstus maximi in Syzigias, & minimi in quadraturas luminarium, circa tempora æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in Syzigiis comitatur semper minimus in quadraturis, ut experientia compertum est. Per minorem autem distantiantiam solis a terra tempore hiberno quam tempore æstivo fit, ut æstus maximi & minimi sæpius præcedant æquinoctium vernum, quam sequantur, & sæpius sequantur autumnale, quam præcedant.

Pendent etiam effectus luminarium ex locorum latitudine. (Fig. 53.) Designet *A p E P* tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *P p* Polos; *A E* æquatorem; *F* locum quemvis extra æquatorem; *F f* parallelum loci; *D d* parallelum ei correspondentem ex altera parte æquatoris; *L* locum quem luna tribus ante horis occupabat; *H* locum telluris ei perpendiculariter subjectum; *h* locum huic oppositum; *K k* loca inde gradibus 90 distantia; *CH*, *C h*, maris altitudines maximas mensuratas a centro telluris; & *C K*, *C k* altitudines minimas: & si axibus *Hh*, *Kk*, describatur ellipsis, deinde ellipseos hujus revolutione circa axem majorem *H h* describatur sphæroïs *HPKhpk*; designabit hæc figuram maris quam proxime, & erunt *C F*, *Cf*, *C D*, *Cd*, altitudines maris in locis *F*, *f*, *D*, *d*. Quinetiam si in prædicta ellipseos revolutione punctum quodvis *N* describat circulum *N M*. secantem parallelos *F f*, *D d*, in locis quibusvis *R*, *T*, & æquatorem *A E* in *S*; erit *C N* altitudo maris in locis omnibus *R*, *S*, *T*, sitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurna loci cujusvis *F*, af-

fluxus

fluxus erit maximus in *F*, hora tertia post appulsum lunæ ad meridianum supra horizontem; postea defluxus maximus in ♌ hora tertiia post occasum lunæ; deinde affluxus maximus in *f* erit minor quam affluxus prior in *F*. Distinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemisphæricos, unum in hemisphærio *K H k* ad boream vergentem, alterum in hemisphærio opposito *K h k*, quos igitur fluctum borealem & fluctum australem nominare licet. Hi fluctus semper sibi mutuo oppositi veniunt per vices ad meridianos locorum singulorum, interposito intervallo horarum lunarium duodecim. Cumque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & australes magis australem, inde oriuntur æstus alternis vicibus majores & minores, in locis singulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & occidunt. Æstus autem major, luna in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam post appulsum lunæ ad meridianum supra horizontem, & luna declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora solstitiorum; præsertim si lunæ nodus ascendens versatur in principio arietis. Sic experientia compertum est, quod æstus matutini tempore hyberno superent vespertinos, & vespertini tempore æstivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quasi pedis unius, ad *Bristoliam* vero altitudine quindecim digitorum : observantibus *Coleprefsio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua maris æstus etiam cessantibus luminarium actionibus posset aliquandiu perseverare.

Conservatio hæcce motus impressi minuit differentiam æstuum alternorum; & æstus proxime post Syzigias majores reddit, eosque proxime post quadraturas minuit. Unde fit ut æstus alterni ad *Plymuthum* & *Bristoliam* non multo magis differant ab invicem, quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim ; utque æstus omnium maximi in iisdem portubus non sint primi a Syzigiis, sed tertii. Retardantur etiam motus omnes in transitu per vada ; adeo ut æstus omnium maximi, in fretis quibusdam & fluviorum ostiis, sint quarti vel etiam quinti in Syzigiis.

Porro fieri potest, ut æstus propagetur ab oceano per freta diversa ad eundem portum, & citius transeat per aliqua freta, quam per alia : quo in casu æstus idem in duos vel plures successive advenientes divisus componere possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstus duos æquales a diversis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu lunæ ad meridianum portus. Si luna in hocce suo ad meridianum appulsu ver-

versabatur in æquatore, venient horis singulis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eosdem affluxibus æquabunt, & sic spatio diei illius efficient, ut aqua tranquille stagnet. Si luna tunc declinabat ab æquatore, fient æstus in oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum est; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in medio ipsorum, & inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem & semel ad minimam; & altitudo maxima, si luna declinat in Polum supra horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu lunæ ad meridianum, atque luna declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batsham* sub latitudine boreali 20 gr. 50 min. *Hallejus* ex nautarum observationibus patefecit. Ibi aqua die transitum lunæ per æquatorem sequente stagnat, dein luna ad boream declinante incipit fluere & refluere non bis ut in aliis portubus sed semel singulis diebus; & æstus incidit in occasum lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum lunæ declinatione augetur hic æstus, usque ad diem septimum vel octavum, dein per alios septem dies iisdem gradibus decrescit quibus antea creverat; & luna declinationem mutante cessat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim subinde defluxus in occasum lunæ & affluxus in ortum, donec luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab oceano *Sinensi* inter continentem & insulam *Luconiam*, alter a mari *Indico* inter continentem & insulam *Borneo*. An æstus spatio horarum duodecim a mari *Indico*, & spatio horarum sex a mari *Sinensi* per freta illa venientes, & sic in horam tertiam & nonam lunarem incidentes, componant hujusmodi motus; sitve alia marium illorum conditio, observationibus vicinorum littorum Autor relinquit.

Prop. LVIII. *Problema.* Invenire vires solis ad perturbandos mutus Lunæ. Vires has per lineas ipsis analogas *TM* & *ML* designari posse in *Prop.* 25. fusius explicavimus. Et licet ob revolutionem terræ & lunæ circa commune gravitatis centrum, motus terræ circa centrum illud viribus similibus perturbetur; attamen summas tam virium quam motuum referre licet ad lunam. Vis *ML* in mediocri sua quantitate est ad vim centripetam, qua luna in orbe suo circa terram quiescentem ad distantiam *PT* revolvi posset, in duplicata ratione temporum periodicorum lunæ circa terram & terræ circa solem. Nam per *Prop.* 8. patet vim centripetam,

tam, qua terra una cum luna in orbe anuuo circa ſolem retinetur, eſſe ad vim centripetam, qua luna in terram tendit, in ratione compoſita ex ratione radii orbis magni *T S* ad radium orbitæ lunaris *P T* directe, & ratione duplicata temporis periodici terræ circa ſolem ad tempus periodicum lunæ circa terram inverſe. Quare ſi illa pars vis centriptæ Lunæ in ſolem, qua motus ejus circa terram perturbatur, radio orbitæ Lnnaris *P T* æqualis ſupponitur; erit hæc ipſa vis ad vim centripetam Lunæ in terram in duplicata ratione temporis periodici terræ circa ſolem ad tempus periodicum Lunæ circa terram inverſe, hoc eſt, in duplicata ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id eſt, ut 1000 ad 178725, ſeu ut 1 ad $178\frac{29}{40}$. Sed ex *Prop.* 20. liquet, quod, ſi terra & luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum diſtantia mediocris ab invicem foret $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum mediocrium terræ quamproxime.

Quodſi enim ſupponatur, Lunam circa Terram quieſcentem moveri; & earum diſtantiam ab invicem mediocrem eſſe 60 ſemidiametrorum Terræ, ut Aſtronomorum obſervationes ſatis bene inter ſe conveniunt, & ſi maſſa Lunæ ponatur ad maſſam Terræ, ut 1 ad 39. 788. quemadmodum in *Corol.* 4. *Prop.* 60; erit diſtantia mediocris Lunæ a Terra, ſi utraq; circa commune gravitatis centrum volvatur 60 ſemidiametrorum, per regulam auream ; ut $\sqrt[3]{39.788}$ ad $\sqrt[3]{40.788}$ ita 60 ad $60\frac{1}{2}$ circiter.

Et vis qua Luna in orbe circa Terram quiescentem ad distantiam *P T* semidiametrorum terrestrium $60\frac{1}{2}$ revolvi posset, est ad vim qua eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvi posset, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60, per *Coroll.* 1 *Prop.* 8. & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quam proxime per *Prop.* 51. Ideoque vis mediocris est ad vim gravitatis in superficie terræ, ut $1 \times 1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, seu ut 1 ad 638092. 6. Inde vero & ex proportione linearum *T M*, *M L*, datur etiam vis *T M*: & hæ sunt vires solis, quibus Lunæ motus perturbantur.

Prop. LIX. *Problema.* Invenire vim solis ad mare movendum? Solis vis *M L* seu *P T*, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares est, per *Prop.* præced. ad vim gravitatis in superficie terræ, ut 1 ad 638092, 6. Et vis *T M—L M* seu 2 *P K* in Syzigiis lunaribus est duplo major. Hæ autem vires, si descendatur ad superficiem terræ, diminuuntur in ratione distantiarum a centro Terræ. Nam eodem modo, ut in *Prop.* præced. probatum est, eam partem vis centripetæ Lunæ in solem, qua motus ejus circa terram perturbatur, & quæ radio orbitæ lunaris *P T* æqualis supponebatur, esse ad vim centripetam lunæ in terram in duplicata ratione terræ circa solem & lunæ circa

terram,

terram, eodem, inquam, modo etiam probatur, eam partem vis centripetæ in ſolem, quæ analoga eſt radio terræ, eſſe ad vim centripetam lunæ in terram, in ratione radii terræ ad radium orbitæ lunaris, directe, & ratione duplicata temporis periodici terræ circa ſolem ad tempus periodicum lunæ circa terram inverſe. Ergo vires ſolis ad perturbandos motus corporum prope ſuperficiem terræ ſunt ad vires ſolis ad perturbandos motus lunæ, ut radius terræ ad radium orbitæ lunaris, hoc eſt, ut 1 ad $60\frac{1}{2}$, ideoque uis $L\,M$ prope ſuperficiem terræ eſt ad vim gravitatis, ut 1×1 ad $638092,6 \times 60\frac{1}{2}$, hoc eſt, ut 1 ad 38604600 quam proxime. Hac vi mare deprimitur in locis, quæ 90 gradus diſtant a ſole. Vi altera, quæ duplo major eſt, mare elevatur & ſub ſole & in regione ſoli oppoſita. Summa virium eſt ad vim gravitatis ut 3 ad 38604600 ſive ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat aquam in regionibus, quæ 90 gradibus diſtant a ſole; ſive elevet eandem in regionibus, ſub ſole & ſoli oppoſitis; hæc ſumma erit tota ſolis vis ad mare agitandum, & eundem habebit effectum, ac ſi tota in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus diſtant a ſole nil ageret.

Hæc eſt vis ſolis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi ſol tam in vertice loci verſatur, quam in mediocri ſua diſtantia a terra. In aliis solis positionibus vis ad mare attollendum est, ut sinus versus duplæ altitudinis solis supra horizontem loci directe, & cubus distantiæ solis a terra inverse. Etenim cum hac vi aqua maxime deprimatur, ubi sol est in horizonte, & maxime elevetur, ubi sol est in vertice loci; & depressio aut elevatio aquarum magis magisque minuatur, quo altius sol supra horizontem ascendit, aut a vertice descendit; & hæc depressio aut elevatio circa initium & finem lentius, circa medium autem celerius decrescat: exprimi potest vis maxima solis, invertice loci positi, per diametrum circuli, qui est sinus versus 180 graduum, & vis solis in cæteris elevationibus per sinus versos harum elevationum duplicatarum. Sed eandem vim solis augescere, aut diminui, quo propius ad terram accedit, aut longius ab ea recedit, idque in ratione triplicata distantiarum inverse, in *Prop.* 28. demonstratum est.

Coroll. Cum vis centrifuga partium terræ a diurno terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis, ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ sub æquatore superet ejus altitudinem sub polis mensura pedum Paris. 85472, ut supra in *Prop.* 54; vis solaris, cum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque ideo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 seu 1 ad 44527, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus sub sole & soli oppositis superet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus distant a sole,

ſole, menſura tantum pedis unius Pariſienſis & digitorum undecim cum trigeſima parte digiti. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

Prop. LX. *Problema.* Invenire vim Lunæ ad mare movendum? Vis Lunæ ad mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim ſolis, & hæc proportio colligenda eſt ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtolium*, tempore verno & autumnali totus aquæ aſcenſus in conjunctione & oppoſitione luminarium, obſervante *Samuele Sturmio*, eſt pedum plus minus 45, in quadraturis autem eſt pedum tantum 25. Altitudo prior ex ſumma virium, poſterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & Lunæ in æquatore verſantium & mediocriter a terra diſtantium ſunto vires S & L; & erit $L+S$ ad $L-S$, ut 45 ad 25, ſeu ut 9 ad 5.

Hæc proportio ſatis congruit cum obſervatione *Samuelis Colepreſſi*, ſecundum quam in portu *Plymuthi* æſtus maris ad pedes plus minus ſexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo in Syzigiis ſuperare poteſt altitudinum ejus in quadraturis pedibus plus ſeptem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia ſit pedum novem, erit $L+S$ ad $L-S$, ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$, ſeu ut 41 ad 23. Ob magnitudinem æſtus in

portu

portu *Bristoliæ* observationibus *Sturmii* magis fidendum esse Autori videtur.

Cæterum ut æstas & hyems maxime vigent, non in ipsis solstitiis, sed ubi sol distat a solstitiis decima circiter parte totius circuitus, seu gradibus plus minus 36 vel 37: similiter ob aquarum reciprocos motus, æstus maximi non incidunt in ipsas luminarium Syzigias, sed sunt tertii a Syzigiis, ut *Prop.* 57. dictum fuit, seu potius (ut a *Sturmio* notatur) sunt tertii post diem novilunii vel pleniunii, seu post horam a novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, hoc est, a meridie vel media nocte novilunio vel plenilunio proximis, ideoque incidunt in horam a novilunio vel plenilunio plus minus quadragesimam tertiam. Supponatur novilunium vel plenilunium sub ipsam meridiem vel mediam noctem accidere; post horas triginta sex sol tertia vice ad meridianum appellet, quo temporis spatio luna motu medio 18 gradibus cum dimidio circiter a sole recedit. Et vis solis in hac distantia lunæ a Syzigiis & quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum maris a vi lunæ oriendum, quam in ipsis Syzigiis & quadraturis, in ratione radii ad sinum complementi distantiæ hujus duplæ, seu anguli graduum 37, hoc est in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque vis solis in analogia superiore per *S* designata erit tantum 0.7986355 *S*.

Sed

Sed & vis lunæ in quadraturis, ob declinationem lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam Luna in quadraturis, vel potius in gradu 18½ post quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′. versatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis ad mare movendum diminuitur in duplicata ratione sinus complementi declinationis quam proxime. Sit enim *A B D* Planum æquatoris, & sit luna in *E*; erit declinatio Lunæ angulus *E B D*, qui ob angulum *C E B* perexiguum, fere æqualis est angulo *E C D*, & hujus anguli sinus complementi erit *C F*, si radius est *C E*. Sed vis quæ aquam in loco æquatoris *B* directe trahit a centro *C*, ubi Luna est in plano æquatoris in *D*, est ad vim qua Luna eandem aquam directe a centro trahit, ubi illa est in *E*, est ut *C E* ad *C F*, hoc est, ut radius ad sinum complementi declinationis *E C D*, seposita vi aquæ centripeta versus centrum *C*, sed quoniam hæc vis tantum augetur, quantum vis altera, aquâ versus Lunam a centro *C* tractâ, diminuitur; igitur vis Lunæ constituta in *D* est ad vim ejus in *E*, ut quadratum sinus totius *C E* ad quadratum sinus complementi *C F* declinationis Lunæ *E C D*. Et propterea vis Lunæ in his quadraturis est tantum 0.8570327 *L*. Est igitur *L* + 0.7986355 *S* ad 0.8570327 *L*. — 0.7986355 *S*, ut 9 ad 5.

Præ-

Præterea diametri orbis, in quo luna sine eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque distantia lunæ a terra in Syzigiis est ad distantiam ejus in quadraturis, ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et distantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ à quadraturis, ubi æstus minimus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ à quadraturis, ubi æstus minimus generatur, sunt ad mediocrem ejus distantiam, ut 69.098747 & 69.897345 ad $69\frac{1}{2}$. Vires autem lunæ ad mare movendum sunt in triplicata ratione distantiarum inverse, ut in *Prop.* 28. de viribus solis demonstratum est, ideoque vires in maxima & minima harum distantiarum sunt ad vim in mediocri distantia, ut 69.098747 cub. & 69.897345 cub. ad $69\frac{1}{2}$ cub. hoc est, ut 0.9830427 & 1.017522 ad 1. Unde fit 1.017522 $L.+$ 0.7986355 S ad 0.9830427 $\times$ 0.8570327 $L.$ —0.7986355 S, ut 9 ad 5. Ut ex hac analogia vis lunæ L erui possit, ponatur 1.017522$=a$, 0.7986355$=b$, 0.9830427$=c$, 0.8570327 $=d$; erit $aL+bS.cdL-bS::9.5$. Ponatur porro $aL+bS=9$, & $cdL-bS=5$; & erit $\frac{9-aL}{b}=S$. Substituatur hic valor quantitatis S in altera æquatione; & erit $cdL-9+aL=5$. Igitur $L=\frac{14}{cd+a}$, hoc est, 7.52688, quæ est vis lunæ. Hæc a summa virium 9 substracta relinquit 1.47312. Est ergo

ergo vis solis ad vim lunæ, ut 1.47312 ad 7.52688, hoc est, ut 1 ad 5.10948, ut ex computo sequenti elucet.

Log. *c*. 9925724
Log. *d*. 9329973

Log. *c d*, 9255697, cujus num. est 0.842506
add. $a = 1.017522$

Log. 14 = 1.1461280 $c\,d + a = 1.860022$
Log. $cd + a = 0.2695129$

Log. $\frac{14}{cd+a} = 0.8766151$, cujus numerus exprimit vim lunæ, & est —— 7.52688
subtrahatur a summa virium 9.00000

Vis solis 1.47312

Log. vis Lunæ 8766151
Log. vis Solis 1682381

7083770, cujus numerus est 5.10948.

Sed secundum Autoris computum vis solis est ad vim lunæ, ut 1 ad 4.4815. Itaque cum vis solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis lunæ erit ad vim gravitatis, ut 1 ad 2518494, aut secundum Autorem, ut 1 ad 2871400.

Coroll.

Coroll. 1. Cum aqua vi solis agitata ascendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum tricesima parte digiti, eadem vi lunæ ascendet ad altitudinem octo pedum & digitorum $7\frac{5}{22}$, aut secundum computum meum ad altitudinem 9 pedum & digitorum $9\frac{14}{30}$; & vi utraque ad altitudinem pedum 11 digitorum $8\frac{1}{2}$. Secundum Autorem, pedum decem cum semisse, & ubi luna est in perigæo, hoc est, ubi terræ est proxima, ad altitudinem pedum duodecim cum semisisse & ultra, præsertim ubi æstus ventis spirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abunde sufficit, & quantitati motuum probe respondet. Nam in maribus, quæ ab oriente in occidentem late patent, uti in mari *Pacifico*, & maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum sex, novem, duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius est & latius patet, æstus dicuntur esse majores quam in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus sit æstus, latitudo maris ab oriente in occidentem non minor esse debet quam graduum nonaginta. In mari *Æthiopico* ascensus aquæ intra tropicos minor est quam in zonis temperatis, propter angustiam maris inter *Africam* & australem partem *Americæ*. In medio mari aqua nequit ascendere, nisi ad littus utrumque & orientale & occidentale simul descendat: cum tamen vicibus alternis ad litto-

ra

ra illa in maribus nostris angustis descendere debeat. Ea de causa fluxus & refluxus in insulis, quæ a littoribus longissime absunt, perexiguus esse solet. In portubus quibusdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadosa, ad sinus alternis vicibus implendos & evacuendos influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent esse solito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepstowæ* in *Anglia*; ad montes S. *Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normannia*; ad *Cambajam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat, nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi potest, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par est ratio fretorum oblongorum & vadosorum, uti *Magellanici*, & ejus quo *Anglia* circundatur. Æstus in hujusmodi portubus & fretis per impetum cursus & recursus supra modum augetur. Ad littora vero quæ descensu præcipiti ad mare profundum & apertum spectant, ubi aqua sine impetu effluendi & remeandi attolli & subsidere potest, magnitudo æstus respondet viribus solis & lunæ.

Coroll. 2. Cum vis lunæ ad mare movendum sit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perspicuum est vim illam esse longe minorem, quam quæ vel in experimentis pendulorum, vel in staticis aut hydrostaticis quibuscunque sentiri

 possit.

possit. In æstu solo marino hæc vis sensibilem edit effectum.

Coroll. 3. Vis lunæ ad mare movendum est ad vim solis consimilem, ut massa lunæ ad massam solis directe & ut cubus distantiæ lunæ ad cubum distantiæ solis inverse, sed massa lunæ est ad massam solis, ut densitas & magnitudo illius ad densitatem & magnitudinem hujus. Et magnitudo lunæ est ad magnitudinem solis, ut cubus diametri illius ad cubum diametri hujus. Igitur vis lunæ est ad vim solis, ut densitas & cubus diametri illius ad densitatem & cubum diametri illius directe, & ut cubus distantiæ illius ad cubum distantiæ hujus inverse. Minuatur diameter solis, & cum ea distantia ejus a terra, ita ut hæc distantiæ lunæ a terra fiat æqualis; & erit diameter solis ita diminuta ad diametrum lunæ, ut diameter illius apparens ad diametrum hujus apparentem, & vis solis ita diminuti erit in distantia lunæ, eadem ac vis ejusdem integri in distantia priori. Quare vis lunæ est ad vim solis, ut densitas & cubus diametri apparentis illius ad densitatem & cubum diametri apparentis hujus. Auferatur ab hac ratione composita ratio cuborum diametrorum apparentium, & remanebit ratio densitatum. Quoniam igitur vis lunæ ad mare movendum est ad solis vim similem ut 4.4815 ad 1, & diameter illius apparens ad diametrum hujus apparentem, ut 31'. 16''½ ad 32'. 12'' sive ut 3753 ad 3864; erit densitas lunæ ad densi-

densitatem solis, ut $\frac{4.4815}{3753\ \text{cub.}}$ ad $\frac{1}{3864\ \text{cub.}}$ hoc est, ut 4891 ad 1000. Sed si vis lunæ ad vim solis ponitur ut 5.10948 ad 1, erit densitas lunæ ad densitatem solis ut 55764 ad 10000.

Densitas autem solis erat ad densitatem terræ, ut 1000 ad 4000, & propterea densitas lunæ est ad densitatem terræ, ut 4891 ad 4000 seu ut 11 ad 9. Est igitur corpus lunæ densius & magis terrestre quam terra nostra.

Corol. 4. Et cum vera diameter lunæ ex observationibus Astronomicis sit ad veram diametrum terræ ut 100 ad 365; erit massa lunæ ad massam terræ, ut 1 ad 39.788.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in superficie lunæ erit quasi triplo minor, quam gravitas acceleratrix in superficie terræ. Nam gravitates acceleratrices sunt ut massæ directe & quadrata distantiarum a centris sive h. l. semidiametrorum inverse. Erit ergo gravitas acceleratrix in superficie lunæ ad illam in superficie terræ, ut 1×13324 ad 39.788×1000, hoc est, ut 1 ad 3 circiter.

Corol. 6. Et distantia centri lunæ a centro terræ erit ad distantiam centri lunæ a communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40.788 ad 39.788.

Corol. 7. Et mediocris distantia centri lunæ a centro terræ in octantibus lunæ erit semidiametrorum maximarum terræ $60\frac{2}{5}$ quamproxime. Nam terræ semidiameter maxima fuit pedum

 Pari-

Pariſienſium 19658600, & mediocris diſtantia centrorum terræ & lunæ, ex hujuſmodi ſemidiametris $60\frac{2}{5}$ conſtàns, æqualis eſt pedibus 1187379440. Et hæc diſtantia (per *Coroll.* ſuperius) eſt ad diſtantiam centri lunæ a communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40.788 ad 39.788: Ideoque diſtantia poſterior eſt pedum 1158268534. Et cum luna revolvatur, reſpectu fixarum, diebus 27, horis 7, & minutis primis $43\frac{4}{6}$; ſinus verſus arcus, quem luna tempore minuti unius primi deſcribit, eſt 12752341, exiſtente radio 1000,000000,000000. Et ut radius eſt ad hunc ſinum verſum, ita ſunt pedes 1158268534 ad 14.7706353. Luna igitur vi illa, qua retinetur in orbe, cadendo in terram, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14.7706353. Et augendo hanc vim in ratione $178\frac{29}{40}$ ad $177\frac{29}{40}$, propter vim ſolis accedentem, per *Prop.* 58. habebitur vis tota gravitatis in orbe lunæ. Et hac vi luna cadendo tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14.8538067. Et ad ſexageſimam partem diſtantiæ lunæ a centro terræ, id eſt, ad diſtantiam pedum 197896573 a centro terræ, corpus grave tempore unius minuti ſecundi cadendo deſcribet etiam pedes 14.8538067. Ideoque ad diſtantiam pedum 19615800, quæ eſt terræ ſemidiameter mediocris, grave cadendo deſcribet pedes 15.11175, ſeu pedes 15 dig. 1. & lin. $4\frac{1}{11}$. Hic erit deſcenſus corporum in latitudine graduum 45. Et quoniam gravitas ejusdem corporis major est in majori & minor in minori latitudine constitutum, estque incrementum ejus in diversa latitudine in ratione duplicata sinus recti latitudinis unius ad sinum rectum latitudinis alterius, ut in *Prop.* 54. dictum est; descensus erit paulo major in latitudine Lutetiæ Parisiorum existente excessu quasi $\frac{2}{3}$ partium lineæ. Gravia igitur per hunc computum in latitudine Lutetiæ cadendo in vacuo describent tempore unius secundi pedes Parisienses 15. dig. 1. & lin. $4\frac{25}{33}$ circiter. Et si gravitas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur a motu diurno terræ in illa latitudine; gravia ibi cadendo describent tempore unius minuti secundi pedes 15, dig. 1. & lin. $1\frac{1}{2}$. Et hac velocitate gravia cadere in latitudine *Lutetiæ* supra ostensum est ad *Prop.* 3. *Cor.* 3. & *Prop.* 51.

Corol. 8. Distantia mediocris centrorum terræ & lunæ in syzigiis lunæ est sexaginta semidiametrorum maximarum, hoc est, æquatoris terræ, demta tricesima parte semidiametri circiter. Et in quadraturis lunæ distantia mediocris eorundem centrorum est $60\frac{1}{6}$ semidiametrorum terræ. Nam hæ duæ distantiæ sunt ad distantiam mediocrem lunæ in octantibus ut 69 & 70 ad $69\frac{1}{2}$.

Corol. 9. Distantia mediocris centrorum terræ & lunæ in syzigiis lunæ est 60 semidiametrorum mediocrium terræ cum decima parte semidiametri. Et in quadraturis lunæ distantia mediocris eorundem centrorum est sexaginta & unius semidiametrorum mediocrium terræ, demta tricesima parte semidiametri.

Coroll. 10. Hinc etiam parallaxis lunæ horizontalis in diversis terræ latitudinibus sive distantiis ab æquatore computari potest. Parallaxis lunæ horizontalis est differentia locorum, in quibus luna in horizonte posita ex centro & superficie terræ observata inter stellas fixas conspicitur, quæ differentia locorum æqualis est angulo, sub quo semidiameter terræ e luna observata cerneretur. *Sit* enim luna in horizonte posita in *L*, & spectator in superficiei terræ loco *T*, hic cerneret lunam inter stellas fixas in *m*; sed idem in centro terræ constitutus lunam inter fixas conspiceret in *n*. Est igitur differentia locorum æqualis angulo *n L m*, qui æquatur angulo *T L C*, sub quo semidiameter terræ e luna *L* observata spectaretur. Sed quoniam terra est figuræ sphæroidalis; semidiametri ejus in diversis latitudinibus inter se differunt, & est semidiameter maxima, quæ est ad æquatorem, ad minimam, quæ est ad polos sive in latitudine 90 graduum ut 19658600 ad 19573000 circiter, earumque differentia 85472, per *Prop.* 54. In cæteris latitudinibus differentia inter diametrum maximam & quamvis aliam in quacunque latitudine, est ad differentiam priorem in ratione duplicata

sinus

ſinus totius ad ſinum cujuſvis latitudinis. Hiſce ſuppoſitis parallaxis lunæ horizontalis in ſyzigiis mediocris, (hoc eſt, ubi diſtantia centrorum lunæ & terræ eſt ſemidiametrorum maximarum terræ 59.366 circiter per *Corol.* 8.) ſub æquatore per hanc analogiam invenitur: ut eſt diſtantia lunæ a terra $TL = 59.366$ ad ſemidiametrum maximam $TC = 1$; ita ſinus totus ad ſinum anguli $T\ L\ C$, qui ſecundum Autorem eſt 57′, 20. In reliquis terræ locis hæc parallaxis diminuitur in eadem fere ratione ac ſemidiametri terræ, & ſecundum Autoris computum in latitudinibus graduum 30, 38, 45, 52, 60, 90, eſt 57′. 16″, 57′. 14″, 57′. 12″, 57′. 10″, 57′. 8″, 57′. 4″, reſpective.

Prop. LXI. *Problema.* Invenire figuram corporis lunæ?

Si corpus lunare fluidum eſſet ad inſtar maris noſtri, vis terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum eſſet ad vim lunæ, qua mare noſtrum in partibus & ſub luna & lunæ oppoſitis attollitur, ut gravitas acceleratrix lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in lunam, & diameter terræ ad diametrum lunæ conjunctim. Nam concipi poteſt vis lunæ tanquam hærens in ſuperficie terræ & vis terræ in ſuperficie lunæ, & evidens eſt vim illam eſſe ad hanc ut maſſa lunæ quæ gravitati acceleratrici eſt proportionalis ad maſſam terræ quæ itidem gravitati ejus acceleratrici est proportionalis, & ut diameter terræ ad diametrum lunæ, per *Prop.* 22. hoc est, ut 1 ad 39.788 & 365 ad 100. seu 100 ad 1091. Unde cum mare nostrum vi lunæ attollatur ad pedes $8\frac{1}{5}$, fluidum lunare vi terræ attolli deberet ad pedes 93. Eaque de causa figura lunæ sphæroïs esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum terræ, & superaret diametros perpendiculares excessu pedum 186. Talem igitur figuram luna affectat, eamque sub initio induere debuit.

Corol. Inde vero fit ut eadem semper lunæ facies in terram obvertatur. In alio enim situ corpus lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium agitantium, essent longe tardissimæ: adeo ut facies illa, quæ terram semper respicere deberet, possit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in *Prop* 52. allatam) respicere, neque statim abinde retrahi & in terram converti.

De Cometis.

Prop. LXII. Cometæ & luna superiores sunt, & in regione planetarum versantur.

Ut defectus parallaxeos diurnæ extollit cometas supra regiones sublunares, sic ex parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones

giones planetarum. Parallaxis diurna, ex terræ ratione circa axem ſuum oriunda, eſt differentia locorum, in quibus cometa ex centro terræ, aut ex eo loco ſuperficiei terræ, ad quem cometa verticalis eſt, & ex quovis alio loco ſuperficiei terræ obſervata inter ſtellas fixas apparet. Hæc parallaxis diurna maxima eſt in luna, ubi ea in horizonte conſtituta eſt, ut in *Corol.* 10. *Prop.* 60. explicatum eſt; inde vero magis magiſque diminuitur, quo altius luna ſupra horizontem elevatur, idque in ratione ſinus complementi elevationis. Hæc parallaxis quoniam in cometis non obſervatur, certum eſt eos luna eſſe altiores. Parallaxis annua ex motu terræ circa ſolem contingit, quo fit, ut cometæ, qui progrediuntur ſecundum ordinem ſignorum, ſint omnes ſub exitu apparitionis aut ſolito tardiores aut retrogradi, ſi terra eſt inter ipſos & ſolem; at juſto celeriores, ſi terra vergit ad oppoſitionem. Et contra, qui pergunt contra ordinem ſignorum, ſunt juſto celeriores in fine apparitionis, ſi terra verſatur inter ipſos & ſolem; & juſto tardiores vel retrogradi, ſi terra ſita eſt ad contrarias partes. Etenim pro diverſo ſitu terræ motus eorum aut juſto velocior, aut juſto tardior, aut etiam retrogradus eſſe apparet, perinde ut fit in planetis, qui pro motu terræ vel conſpirante vel contrario, nunc retrogradi ſunt, nunc tardius progredi videntur, nunc vero celerius, qua de re prolixius in *Phænom.* I. actum eſt. Si terra pergit ad eandem partem

cum

cum cometa, & motu angulari circa solem tanto celerius fertur, ut recta per terram & cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra cometam seu ad stellas fixas, cometa e terra spectatus, ob motum suum tardiorem, apparet esse retrogradus; sin terra tardius fertur, motus cometæ (detracto motu terræ) fit saltem tardior. At si terra pergit in contrarias partes, cometa exinde velocior apparet. Et hæc quidem parallaxis longitudinem cometæ respicit, hoc est, distantiam ejus in ecliptica a primo gradu arietis, atq; ex hac parallaxi Autor distantiam cometarum a terra colligendo invenit, eos orbe Jovis inferiores esse solere.

Est & alia parallaxis ex motu terræ circa solem proveniens, quæ latitudinem cometarum concernit, hoc est, distantiam eorum ab ecliptica versus boream aut austrum, unde cometæ apparent in sphæra fixarum a cursu circulari deflectere, & lineam admodum irregularem describere. Etenim cum planum, in quo cometa movetur, cum plano eclipticæ, in quo terra fertur, non coincidat; cometa modo supra eclipticam in septentriones ascendit, modo infra eclipticam in australes partes descendit. Attamen quia in eodem plano semper movetur, tramitem circularem semper delineare videretur, si terra esset immota: sed quoniam & ipsa movetur in plano eclipticæ, cometa pro diverso situ terræ ex eadem contemplatus altius modo versus boream ascendere modo versus austrum descendere apparebit, quam si terra in eodem semper loco hæreret. Hæc ita se habere ex observationibus compertum est. Pergunt enim cometæ propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa, quæ a parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, & quoties terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur ergo hæc deflexio maxime ex parallaxi, propterea quod respondet motui terræ; & insignis ejus quantitas, Autoris computo, collocavit disparentes cometas satis longe infra Jovem. Unde consequens est, quod in perigæis & periheliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbes martis & inferiorum planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœlestis a sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur splendor in quadruplicata ratione distantiæ. Concipiantur enim duæ superficies, sphæricæ concentricæ, minorem unam, alteram majorem, & in centro utriusque constitutum corpus aliquod lucidum; quoniam hoc ipsum radios suos undiquaque spargit, evidens est superficiem sphæræ minoris concavam æque omnes radios capere, ac superficiem concavam minoris sphæræ. At radii in illa magis constipati sunt, in hacce magis dissipati, & densitas eorum in illa est ad densitatem eorundem in hacce,

hacce, in ratione superficierum sphæricarum inverse, hoc est, in ratione duplicata semidiametrorum sive distantiorum a corpore lucido inverse ; ergo & sensatio, quæ à radiis nervos opticos percutientibus in diversis distantiis excitatur, est in eadem ratione. Sed & corpus lucidum majus in distantia minore, & minus in majori, apparet, ac diminuitur semper in ratione distantiarum duplicata inverse, quare splendor corporis, qui partim ex radiorum percussione, partim ex apparenti corporis magnitudine, dependet, diminuitur in ratione distantiæ augescentis sive diametri apparentis decrescentis quadruplicata. Unde si detur & lucis quantitas & apparens diameter cometæ, dabitur distantia, auferendo scilicet à ratione lucis ejus ad lucem planetæ cujuscunque rationem duplicatam diametri ejus ad diametrum Planetæ, prodibit ratio distantiæ cometæ ad distantiam Planetæ duplicata inverse : sive, quod eodem redit, addendo rationi lucis ad lucem subduplicatæ inverse, rationem diametri ad diametrum, prodibit ratio distantiæ ad distantiam. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum sexdecim pedum a *Flamstedio* observata & micrometro mensurata, æquabat 2′ 0″ ; nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum 11″, vel 12″. Luce vero & claritate capitis superabat caput cometæ anni 1680, stellasque pri-

mæ

mæ vel ſecundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus ſaturnum cum annulo ſuo quaſi quadruplo lucidiorem fuiſſe: & quoniam lux annúli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi ſit quaſi 21″, ideoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter eſſet 30″: erit diſtantia cometæ ad diſtantiam ſaturni, ut 1 ad $\sqrt{4}$ inverſe, & 12″ ad 30″ directe, id eſt, ut 24 ad 30 ſeu 4 ad 5. Rurſus cometa anni 1665 menſi *Aprili*, ut auctor eſt *Hevelius*, claritate ſua pene fixas omnes ſuperabat, quin etiam ipſum ſaturnum ratione coloris videlicet longe vividoris. Quippe lucidior erat hic cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum ſtellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quaſi 6, at nucleus cum planetis ope tubi optici collatus plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio ſaturni, nunc ipſi æqualis judicabatur. Porro cum diameter capillitii cometarum raro ſuperet 8′ vel 12′, diameter vero nuclei ſeu ſtellæ centralis ſit quaſi decima, vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet ſtellas haſce ut plurimum eſſe ejuſdem apparentis magnitudinis cum planetis. Unde cum lux earum cum luce ſaturni non raro conferri poſſit, eamque aliquando ſuperet, manifeſtum eſt, quod cometæ omnes in periheliis vel infra ſaturnum collocandi ſint, vel non longe ſupra. Errant igitur toto cœlo, qui cometas in regionem fixarum prope ablegant:

qua

qua certe ratione non magis illustrari deberent a sole nostro, quam planetæ, qui hic sunt, illustrantur a stellis fixis.

Hæc ita se haberent, si lux non fuscaretur per fumum illum maxime copiosum & crassum, quo caput instar comæ circumdatur, quasi per nubem obtuse semper lucens. Nam quanto redditur obscurius corpus per hunc fumum, tanto propius ad solem accedat necesse est, ut copia lucis a se reflexæ planetas æmuletur. Inde verisimile fit, cometas longe infra sphæram saturni descendere, uti ex parallaxi probatum est. Idem vero quam maxime confirmatur ex caudis. Has enim ex fumo e corpore cometæ ascendente & sparso per æthera oriri postea probabitur. Minuenda igitur est, distantia cometaraum, ne fumus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expansione propagetur.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu cometarum a terra solem versus, ac decrescente in eorum recessu a sole versus terram. Sic enim cometa posterior anni 1665 (observante *Hevelio*) ex quo conspici cœpit, remittebat semper de motu suo apparente, ideoque præterierat perigæum; splendor vero capitis nihilominus indies crescebat, usque dum cometa radiis solaribus obtectus desiit apparere. Cometa anni 1683 (observante eodem *Hevelio*) in fine mensis *Julii*, ubi primum conspectus est, tardissime movebatur, minu-

minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus in dies augebatur usque ad *Sept.* 4. quando evasit graduum quasi quinque unius diei spatio. Igitur toto hoc tempore cometa ad terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro mensurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. esse tantum 6′. 5″. inclusa coma, at *Sept.* 2. esse 9′. 2″. Caput igitur initio longe minus apparuit, quam in fine motus; at initio tamen in vicinia solis longe lucidius extitit, quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius a sole quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad terram. Cum his observationibus *Hevelii* maxime congruunt, quæ *Cysatus* & *Keplerus* referunt, se in cometa anni 1618 inde a medio *Decembris* ad 7 *Jan.* anni sequentis observasse; nec non quæ *Flamstadius* de alio cometa, inde a 12 *Decembris* anni 1680. ad 25 *Jan.* anni sequentis observato, commemorat. Omnes inquam in eo consentiunt quod, si sumantur æqualia a perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales a terra distantias, æqualiter lucere debuissent, in plaga solis maxime splenduere, ex altera perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque situ differentia, concluditur magna solis & cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux cometarum regularis esse solet & maxi-

maxima apparere, ubi capita velocissime moventur, atque ideo sunt in perigæis; nisi quatenus ea major est in vicinia solis.

Coroll. 1. Splendent igitur cometæ luce solis a se reflexa.

Coroll. 2. Ex dictis etiam intelligitur, cur cometæ frequentiores appareant in regione solis, quam in opposita. Si cernerentur in regionibus longe ultra Saturnum, deberent sæpius apparere in partibus soli oppositis. Forent enim terræ viciniores, qui in his partibus versarentur; & sol interpositus obscuraret ceteros. Verum percurrendo historias cometarum, reperit Autor, quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in hemisphærio solem versus, quam in hemisphærio opposito, præter alios procul dubio non paucos, quos lux solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur a sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quam sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantilli intervallo circa solem descripti pars longe major sita est a latere terræ, quod solem respicit; inque parte illa majore cometæ, soli ut plurimum viciniores, magis illuminari solent.

Coroll. 3. Hinc etiam manifestum est, quod cœli resistentia destituuntur. Nam cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liber-

liberrime, & motus suos, etiam contra cursum planetarum diutissime conservant.

Prop. LXIII. Cometæ in sectionibus conicis umbilicos in centro solis aut prope illud habentibus, moventur, & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describunt.

Quoniam enim cometæ motu suo lineas curvas describunt, & cursum suum circa solem flectunt, ut ex observationibus constat; a recto tramite vi aliqua detorquentur, per leg. 1. Et quoniam hæc vis, quæ planetas a lineis rectis detorquet, maxime solem respicit, tanquam corpus mole materiæ omnia cetera in solari systemate longe superans; non est dubium, quin & in cometis, quæ etiam sunt corpora, eadem vis in solem maxime tendat. Quare, per *Prop.* 5. radiis ad solem ductis, describunt areas temporibus proportionales. Et quoniam vis acceleratrix in Planetis est major in minori, & minor in majori a sole distantia, & semper est in ratione distantiæ duplicata inverse; extra omnem controversiam positum est, & cometas, cum sint corpora Planetis similia, eandem in solem gravitandi legem observare.

Hæc ita se haberent, si sol e loco suo nullatenus moveretur; sed quoniam is per attractionem Planetarum continuo e loco suo cietur, & cum Planetis circa commune gravitatis centrum describit ellipsin, cujus umbilicus æque ac orbium Planetarum umbilici cum hoc centro coincidit, idque centrum non longe a solis centro

 distat,

distat, per *Prop.* 49. certum est, cometas, qui maximum temporis spatium in longissimis a sole distantiis commorantur, & nonnisi per vices in oras hasce revertuntur, non magnopere centrum hoc mutare posse, ideoque umbilicum orbitarum suarum a centro solis non longe distare.

Coroll. 1. Hinc si cometæ in orbem redeunt; orbes erunt ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in axium principalium ratione sesquiplicata, per *Coroll.* 4. *Prop.* 8. & *Coroll.* 1. *Prop.* 15. Ideoque cometæ maxima ex parte supra Planetas versantes, (quo tempore conspectum nostrum effugiunt) & eo nomine orbes axibus majoribus quam Planetæ describentes, tardius revolventur. Ut si axis orbis cometæ sit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id est, ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$, seu 8, ad 1, ideoque erit annorum 240. Quod autem cometæ revertantur, adhuc non omnino certum est, etsi valde probabile. Hæc incertitudo præconceptæ Astronomorum præteritis ætatibus opinioni (acsi cometæ non sint nisi vapores in aëris nostri aut superioribus regionibus collecti, & non multo post dissipandi) ideoque in observandis eis negligentiæ tribuenda est. Nam (ut Cl. D. *Hallejus* in Astronomiæ cometicæ synopsi monet) etsi veteres *Ægyptii* & *Chaldæi*, si qua fides *Diodoro Seculo*, longa observationum serie instructi, co-

cometarum ἐπιτολὰς (sive exortus) prænunciare valuerunt, attamen eorum de his rebus scientia potius Astrologiæ calculo fatidico quam Astronomicis motuum theoriis est referenda: siquidem iisdem artibus etiam terræ motus ac tempestates prævidisse dicuntur. Ac vix alia a *græcis* utriusq; populi victoribus, reperta est apud eos doctrina. Quin & apud hos *Aristotelis* sententia, qui cometas nihil aliud esse voluit, quam vapores sublunares, vel etiam meteora aërea, tantum prævaluit, ut hæc Astronomicæ scientiæ pars longe subtilissima omnino neglecta manserit. Nec etiam ad *Senecam* Philosophum ex insignium sui temporis cometarum Phænomenis conjicientem, eosdem sydera esse cum mundo duratura & vaticinio non irrito promittentem, aliquando futura secula, quibus hæc tam occulta *dies extraheret ac longioris ævi diligentia:* quibusque admirationi foret, hæc *veteres* nescire potuisse; postquam *demonstraverit aliquis* Naturæ interpres, *in quibus cœli partibus cometæ errent, quanti qualesque sint*, nec ad eum inquam Astronomorum cohors animum tantum advertit, ut ad cometarum motus atttentiores fierent.

Quare *Hallejus* evolutis plurimis cometarum historiis nihil omnino invenit, quod huic negotio inservire possit, ante annum a Christo nato 1337, quo *Nicephorus Gregoras* Historicus & Astronomus *Constantinopolitanus* cometæ semitam inter fixas satis accurate descripsit. Post *Nicephorum Regiomontanus* observatis cometam anni 1472, omnium velocissimum ac terris proximum, quod unius diei spatio 40 gradus sub circulo cœli maximo emensus, magnitudine ac comæ erat terribilis. *Regiomontanum* excepit *Tycho*, qui, ubi cometam anni 1577, nulli, quæ sentiretur, parallaxi diurnæ obnoxium deprehendit, primus cometas luna superiores & inter Planetas collocandos esse indagavit. *Tychonem* insecutus est *Kepleri* sagacissimum & plane divinum ingenium, cui duo cometæ affulsere, ex quorum observatis conclusit ipse, non uno parallaxis annuæ indicio, cometas inter orbes planetarum liberrime quaquaversum ferri: motu quidem non multum a rectilineo diverso; sed quem nondum definire licuit. *Hevelius* eandem hypothesin motus rectilinei amplexus, cœlo calculum suum non penitus consentire quæstus est, viamque cometicam versus solem incurvari ei suboluit. Tandem de summo cœlo lapsus prodigiosus ille cometa anni 1680, quasi casu perpendiculari solem petens, & exinde pari velocitate assurgens, controversiam omnem decidit. Ipsius enim motus apparens per quatuor menses continuos, quantum forsan mortalibus fast est, accuratissime a *Cassino* & *Flamstedio* observatus, Autori nostro materiam amplissimam suppeditavit, ex iisdem principiis cometarum trajectorias deducendi, ex quibus *Keplerus* Planetarum orbitas definierat. Problema arduum & tanto Oedipo dignum!

Ex

Ex hacce *Halleji* historia cometarum videre est, quam incertus eorum reditus sit in oras nostras. Etenim certitudo hujus rei nonnisi multorum seculorum observationibus probari potest, quas veterum negligentia nobis præcipuit. Certum quidem est cometas in omnibus seculis apparuisse, an vero posteriorum ætatum cometæ iidem sint qui priorum, eo usque probatum non est, donec periodus eorum certius est definita, & motus posteriorum, cum priorum motu accuratius, quam hactenus, comparata. Interim multa suadent *Hallejum*, alioquin sagacissimum, ut credat cometam anni 1531, ab *Appiana* observatum, eundem fuisse cum illo, qui anno 1607 descriptus est a *Keplero* & *Longomontano*, quemque ipse iterum reversum vidit ac observavit anno 1682. Et licet inæqualitas periodorum adversari videtur, eam tamen tantam non esse putat, ut iisdem causis physicis non possit attribui, quibus Saturni motus a ceteris, præsertim Jove, ita interturbatur, ut per aliquos dies integros incertum sit hujus Planetæ tempus periodicum. Confirmatur etiam eundem esse potuisse ex eo, quod anni 1456 æstate, conspectus fuerat cometa eodem pene modo inter solem & terram transiens retrograde. Unde reditum ejus anno 1758 fore fidenter audet prædicere.

Porro *Hallejus* ex historia observavit cometam insignem intervallo annorum 575 quater apparuisse, scillicet mense *Septembri* post eædem *Julii Cæsaris*, anno Christi 531, *Lampadio* & *Oreste Coss.* anno Christi 1106 mense *Februario*, & sub finem anni 1680. Unde non temere conjicitur cometam qui diversis hisce temporibus apparuit, unum eundemque fuisse, eumque anno 2256 esse rediturum. Nec obstat quod cometa anni 1680 cum cauda longa & insigni, iste vero sub mortem *Cæsaris* sine cauda apparuit. Fieri enim potuit, ut cauda ob incommodam telluris positionem tum temporis non cerneretur. Crediderit etiam idem *Hallejus* cometam anni 1532, eundem fuisse cum illo, qui ab *Hevelio* observabatur ineunte anno 1661, nisi observationes *Appiani* forent nimis rudes. Quare certitudinem hujus rei posteris explorandam relinquit. Quibus & plurium aliorum catalogum concinnavit, eorumque semitas tam accurate delineavit, ut si quis eorum redierit, ex motu ejus facile eundem cognoscere possint, & ex periodo ejus reditum prædicere.

Corol. 2. Orbes cometarum etsi ellipticos esse multa probant, attamen adeo sunt oblongi, ut (quantum ex observationibus conjicitur) ea pars eorum, quæ sub conspectum nostrum venit, non ita multum a parabola differat, nec si pro tali assumatur, calculus eorum errori, qui sentiri possit, obnoxius evadat.

dat. Quare computus eorum facilior quam planetarum redditur.

Cor. 3. Et propterea velocitas cometæ omnis, erit ſemper ad velocitatem planetæ cujuſvis: circa ſolem in circulo revolventis, ſive (quod eodem redit) ad velocitatem ejus mediocrem, ſi in ellipſi revolvitur, in eadem diſtantia, in ratione ſubduplicata numeri binari ad unitatem, ſive ut $\surd$ 2 ad 1. per *Prop.* 13. Ponamus radium orbis magni, ſeu ellipſeos, in qua terra revolvitur, ſemidiametrum maximam eſſe partium 100000000: & terra motu ſuo diurno mediocri deſcribet partes 1720212, ſecundum hanc anologiam: ut eſt tempus periodicum terræ circa ſolem ad totam peripheriam circuli 3.141, &c. ita unus dies ad partem peripheriæ uno die deſcriptam. Et motu horario deſcribet partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque cometa in eadem telluris a ſole diſtantia mediocri, ea cum velocitate, quæ ſit ad velocitatem telluris, ut $\surd$ 2 ad 1, deſcribet motu ſuo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus diſtantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in ſubduplicata ratione diſtantiarum reciproce, per *Corol.* 4. *Prop.* 8. & *Corol.* 1. *Prop.* 15. ideoque datur.

Corol. 4. Unde si latus rectum parabolæ quadruplo majus sit radio orbis magni, & quadratum radii illius ponatur esse partium 100000000: area quam cometa, radio ad solem ducto, singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. Ducatur enim in parabola (Fig. 69. Tab. VII.) ex foco *F* ordinata *p F* ad axin *A D*; & erit area *A p F* ad aream circuli radio *A F* descripti, ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159, &c. nam si radius circuli ponitur 1; erit area circuli ad quadratum diametri, (per *Corol.* 1. *Prop.* 23. Geom.) ut 3.14159, &c. ad 4. Sed rectangulum sub ordinata *p F* & abscissa *F A* est dimidium hujus quadrati, hoc est 2, & area parabolica *A p F* hujus rectanguli duæ tertiæ partes, hoc est $\frac{4}{3}$, per *Prop.* 55. Geom. Ergo area parabolica *A p F* est ad aream circuli, radio *A F* descripti, ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159, &c. Quodsi igitur velocitas cometæ revolventis in parabola eadem esset cum velocitate planetæ gyrantis in circulo; esset tempus, quo cometa describit arcum parabolæ *A p*, ad tempus periodicum planetæ in eadem ratione. Sed quia velocitas cometæ est ad velocitatem planetæ in eadem distantia à sole, ut $\sqrt{2}$ ad 1. hacce ratione prior est diminuenda, ita ut sit tempus, quo cometa describit arcum parabolicum *A p*, ad tempus periodicum planetæ, ut

4

$\frac{4}{3\times\sqrt{2}}$ ad $\frac{3.14159}{1}$ sive ut $\sqrt{\frac{16}{9\times 2}}$, hoc est, $\sqrt{\frac{8}{9}}$ ad 3.14159. E. g. Tempus periodicum terræ circa solem est 365.2565 dierum, ergo tempus quo cometa, qui a sole æque distat in perihelio ac terra, describet arcum parabolicum *A p*, per hanc analogiam invenitur: ut est 3.14159, &c. ad $\sqrt{\frac{8}{9}}$ ita 365.2565 ad tempus quæsitum, quod erit 109 d. 14 hor. 46′. Quodsi quadratum radii ponatur esse partium 100000000, erit area parabolica harum partium 133333333, quas cometa, radiis ad solem ductis, describit diebus 109 hor. 14. 46′. Igitur area, quam cometa radio ad solem ducto describit singulis diebus, erit $1216373\frac{1}{2}$ partium, & singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. Sin latus rectum majus sit vel minus in ratione quavis, erit area diurna & horaria major vel minor in eadem ratione subduplicata. Nam tempora quibus cometa in distantia majore vel minore areas parabolicas similes describeret, sunt ut revolutiones in circulis, hoc est, in ratione sesquiplicata distantiarum, per *Cor.* 4. *Prop.* 8. hoc est, majus temporis spatium requiritur, ut cometa in parabola majore aream similem describat, & minus in mi-

minore, ergo tempore æquali minorem partem parabolæ majoris, & majorem minoris, describet, idque in ratione distantiarum sesquiplicata inverse, hoc est, si ratio distantiarum ponitur ut *a* ad *b*, erit ratio arearum æquali tempore descriptarum, ut $\frac{1}{a\sqrt{a}}$ ad $\frac{1}{b\sqrt{b}}$. Sed quoniam areæ similes parabolarum inæqualium sunt in ratione duplicata laterum rectorum sive distantiarum, utpote quæ laterum rectorum sunt quadrantes; igitur ratio prior est hacce ratione duplicata augenda; eritque tota ratio ut $\frac{aa}{a\sqrt{a}}$ ad $\frac{bb}{b\sqrt{b}}$, hoc est, $\sqrt{a}$ ad $\sqrt{b}$, quæ est subduplicata distantiarum, sive laterum rectorum.

Prop. LXIV. Cometæ sunt corpora solida compacta, fixa & durabilia ad instar corporum planetarum, eorumque caudæ sunt, fumi aut vapores e capitibus ascendentes.

Si cometæ nihil aliud essent, quam vapores vel exhalationes terræ, solis & planetarum; ille qui Anno 1680 apparuerat, in transitu suo per viciniam solis statim dissipari debuisset. Siquidem secundum *Halleji* computum distantia ejus a sole in perihelio non major fuit quam $612\frac{1}{2}$ partium ejusmodi, qualium radius orbis terræ continet 100000. Quamobrem sexagesies ter propius ad solem accessit quam Mercurius. At calor solis in di-

diversis a sole distantiis est ut radiorum densitas, hoc est, in ratione distantiarum a sole duplicata reciproce, ut in *Prop.* 62. demonstratum est. Ideoque cum distantia cometæ *Decemb.* 8. ubi in perihelio versabatur, esset ad distantiam terræ a centro solis, ut 6 ad 1000 circiter, calor solis apud cometam eo tempore erat ad calorem solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu ut 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æstivum solem, ut Autor expertus est: & calor ferri candentis (ut conjectatur) quasi triplo vel quadruplo major, quam calor aquæ ebullientis; ideoque calor, quem terra arida apud cometam in perihelio versantem ex radiis solaribus concipere posset, quasi 2000 vicibus major est quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuisset.

Caudas a capitibus oriri, & in regiones a sole aversas ascendere, confirmatur ex legibus, quas observant. Ut quod in planis orbium cometarum per solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione solis in eas semper partes, quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Etenim ut in aëre nostro fumus corporis cujusvis igniti petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel oblique, si corpus moveatur in latus:

tus: ita in cœlis, ubi corpora gravitant in solem, fumi & vapores ascendere debent a sole, & superiora vel recta petere, si corpus fumans quiescit; vel oblique, si corpus progrediendo loca semper deserit, a quibus superiores vaporis partes ascenderant. Nam in atmosphæram solis incidentes fumi & vapores e capitibus egressi magis ab æthere-resistente quam ipsa capita retardantur. Præterquam quod (seposita hac resistentia) a sole longius recedentes fumi, diminuta gravitate acceleratrice lentius quam antea moventur, & in orbe largiore, quam capita, gyrantes non possunt similes arcus cum capitibus æqualibus temporibus describere: quare in posterioribus partibus ut hæreant necesse est. Deviatio hæc cum sit in planis cometarum, non potest observari a spectatore in planis iisdem constuto; quare hoc casu ipsi apparent in partibus a sole directe aversis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Non enim solum propter parallaxin cometæ majorem, quam ipsius caudæ, hæcce supra orbem cometæ elevari apparebit, si spectator supra planum orbis cometæ constituitur, aut deprimi, si spectator infra planum illud collocatur; sed & si concipiatur circulus maximus per solem & cometam ductus, ab hocce cauda deviare videbitur. Hæc deviatio cæteris paribus minor est, ubi cauda obliquior est

ad

ad orbem cometæ, hoc est, quo majore in angulo secat orbem, ut & ubi caput cometæ ad solem propius accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput cometæ. Nam deviatio ista minor est, ubi ascensus vaporis est velocior: nimirum in vicinia solis & juxta corpus fumans; & ubi propter parallaxium capitis & caudæ differentiam majorem, hæcce vel supra orbem cometæ magis elevari, vel infra cum magis deprimi videtur. Præterea caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Hæc curvatura major est, ubi major est deviatio, & magis sensibilis, ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Etenim ex deviationis diversitate quæ de pendet ex diverso ascensus velocitate incurvabitur vaporis columna. Inde etiam evenit, ut deviationis angulus minor sit juxta caput cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram; atque ideo cauda convexo sui latere partes respicit a quibus fit deviatio, quæque in recta sunt linea a sole per caput cometæ in infinitum ducta. Denique caudæ quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sunt ad latera convexa paulo splendidiores & limite minus indistincto terminatæ, quam ad concava. Nam quia vapor in columnæ latere anteriore paulo recentior est, ideo etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque prop-

terea

terea copioſius reflectet, & limite minus
diſtincto terminabitur.

Vapores autem, qui ſpatiis tam imme
implendis ſufficiant, ex cometarum atmoſp
ris oriri poſſe, intelligitur ex raritate a
noſtri. Nam ſecundum computationem N
toris, globus aëris noſtri digitum unum la
ea cum raritate, quam haberet in altitud
ſemidiametri unius terreſtris, impleret om
planetarum regiones uſque ad ſphæram S
turni & longe ultra. Proinde cum aër a
huc altior in immenſum rareſcat, & co
ſeu atmoſphæra cometæ, aſcendendo ab *illi*
centro, quaſi decuplo altior ſit quam ſupe
ficies nuclei, deinde cauda adhuc altius a
cendat, debebit cauda eſſe quam rariſſima
Et quamvis ob longe craſſiorem cometaru 51
atmoſphæram, magnamque corporum gravi
tationem ſolem verſus, & gravitationem parti
culârum aëris & vaporum in ſe mutuo, fi
eri poſſit, ut aër in ſpatiis cœleſtibus inque
cometarum caudis non adeo rareſcat; per-
exiguam tamen quantitatem aëris & vapo-
rum ad omnia illa caudarum phænomena
abunde ſufficere, ex hac computatione per-
ſpicuum eſt. Nam & caudarum inſignis ra-
ritas colligitur ex aſtris per eas tranſlucen-
tibus. Atmoſphæra terreſtris luce ſolis ſplen-
dens craſſitudine ſua paucarum milliarium
& aſtra & ipſam lunam obſcurat, & extin-
guit penitus: per immenſam vero caudarum
craſſi-

Fig : 50.

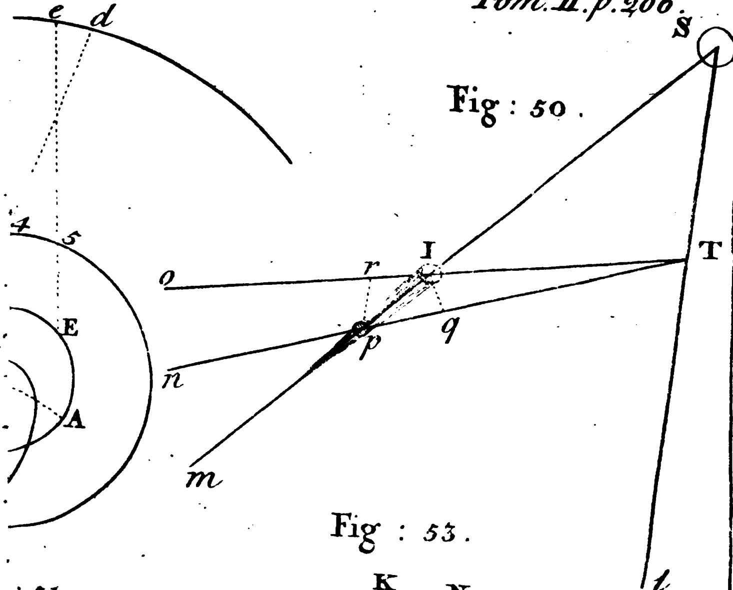
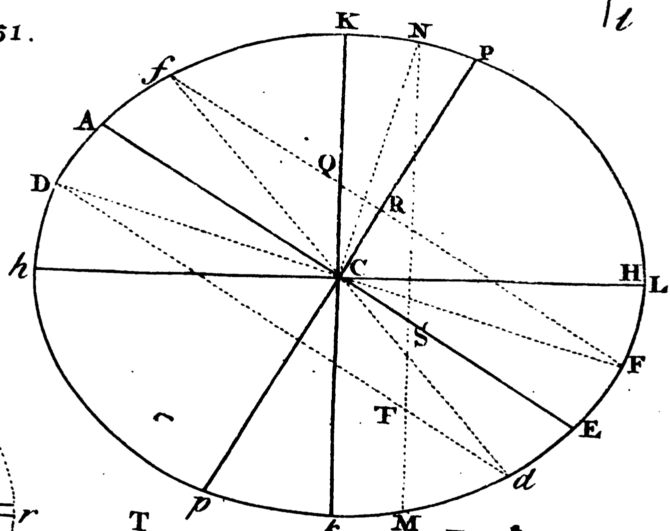


Fig : 53.



: 51.

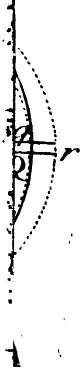


Fig : 54.

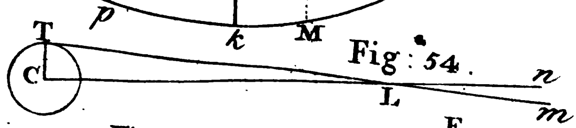
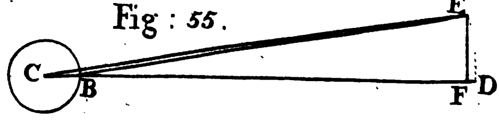


Fig : 55.



crassitudinem luce pariter solari illustratam, astra minima sine claritatis detrimento transflucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor; quam aëris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve lucem solis in jubare reflectentis.

Quo temporis spatio vapor a capite ad terminum caudæ ascendit, sequenti ratione propemodum cognosci potest. Sit *O C R* orbita cometæ, (Fig. 49.) *S* sol, *C* caput & *C V* cauda cometæ. Ducatur ex sole *S* recta *S T*, aliquantulum a cauda divergens, & secans orbitam cometæ in *O*; & erit *O* locus in quo vapor ascendere cœpit, & per arcum *O C* cognoscetur tempus, quo ad terminum caudæ ascendit. Agatur enim ex sole *S* ad extremum caudæ *V* recta *S V* secans orbitam in *X*; & evidens est, quodsi vapor recta ascenderet a sole, neque cometam sequeretur, *X* fore locum in quo vapor coeperat ascendere. At quia vapor non recta ascendit a sole, sed motum cometæ, quem ante ascensum suum habuerat, retinendo, & cum motu ascensus sui eundem componendo, ascendit oblique, recta illa inde a sole ita ducenda est, ut parallela sit caudæ, vel potius (ob motum curvilineum cometæ) ut eadem a linea caudæ divergat. Hoc pacto invenit Autor, quod vapor, qui erat in termino caudæ *Jan.* 25, ascendere coeperat a capite ante *Dec.* 11. ideoque ascensu suo toto ultra dies

45

45 consumpserat. At cauda illa omnis, quæ *Dec.* 10. apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui a tempore perihelii cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in vicinia solis celerrime ascendebat, & postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; & ascendendo augebat longitudinem caudæ: hæc autem, quamdiu apparuit, ex vapore fere omni constabat qui a tempore perihelii ascenderat; & vapor, qui primus ascendit, & terminum caudæ composuit, non prius evanuit quam ob nimiam suam, tam a sole illustrante, quam ab oculis nostris, distantiam videri desiit. Unde etiam caudæ cometarum aliorum, quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuo a capitibus, & mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, a capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ participando motum illum capitum, quem habuere sub initio, per cœlos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rursus colligitur, spatia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida planetarum & cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores, motus suos velocissimos liberrime peragunt, ac diutissime conservant.

Ascen-

Ascensum caudarum ex atmospheris capitum, & progressum in partes a sole aversas, *Keplerus* ascribit actioni radiorum lucis, materiam caudæ secum rapientium. Et auram longe tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non a ratione prorsus alienum Autori videtur, non obstante quod substantiæ crassæ impeditissimis in regionibus nostris a radiis solis sensibiliter propelli nequeant. Suspicatur autem ipse ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum, & auræ æthereæ in atmosphæra solis, potius oriri. Nam sicut fumus à calore generatus ascendit in camino impulsu aëris cui innatat. Aër enim ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, & fumum implicatum secum rapit. Simili ratione particulæ cometarum reflectendo radios solares, (qui media, quæ permeant, non agitant nisi in reflexione & refractione) ea actione calefactæ rarefient, calefacientque auram æthereain, cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem suam specificam, qua prius tendebat in solem, ascendet & secum rapiet particulas reflectentes, ex quibus cauda componitur. Ad ascensum vaporum conducit etiam, quod hi gyrantur circa solem, & ea actione ob diminutam in distantia majori gravitatem acceleratricem, conantur a sole magis recedere quam capita, ut superius dictum est. Hæ sunt causæ ascensus caudarum in vicinia solis, ubi orbes curviores sunt, & cometæ intra densiorem & ea ratione graviorem solis Atmosphæram consistunt, atque caudas quam longissimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc nascuntur, conservando motum suum, & interea versus solem gravitando, movebuntur circa solem in ellipsibus pro more capitum, & per motum illum capita semper comitabuntur, & iis liberrime adhærebunt.

Caudas hasce in regiones longinquas cum eorum capitibus abeuntes vel inde post longam annorum seriem cum iisdem ad nos redire, vel potius ibi rarefactas paulatim evanescere, & in descensu capitum ad solem novas subinde in periheliis nasci, ac vapores hosce rarefactione perpetuo dilatatos diffundi tandem & spargi per cœlos universos, deinde paulatim in planetas per gravitatem suam attrahi, & cum eorum atmosphæris misceri, rationi consentaneum Autor putat, ut quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur in planetis, & in terram aridam convertitur, continuo suppleri & refici possit. Suspicatur etiam spiritum illum, qui aëris nostri pars minima est, sed subtilissima & optima, ac ad rerum omnium vitam requiritur, ex cometis præcipue venire.

Caudas a capitibus oriri ex eo confirmatur, quod Atmosphæræ cometarum in descensu eorum in solem excurrendo in caudas, diminuuntur & (ea certe in parte quæ solem respicit) angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum a sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur: si modo phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem appa-

apparent, ubi capita jam modo ad ſolem calefacta in caudas maximas & fulgentiſſimas abiere, & nuclei fumo forſan craſſiore & nigriore in atmoſphærarum partibus infimis circumdantur. Ita D. *Storer* literis, quæ in manus Autoris incidere, ſcripſit, caput cometæ anni 1680 menſe *Decemb.* ubi caudam maximam & fulgentiſſimam emittebat, parvum eſſe & magnitudine viſibili longe cedere cometæ, qui menſe *Nov.* ante ſolis ortum apparuerat. Idem fere obſervavit *R. P. Valentinus Euſtachius*, *Baſileæ* agens, in cometa anni 1668, *Mart.* 5. ſt. nov. hora ſeptima veſpertina. Congruunt cum hiſce obſervationibus quæ de cometa anni 1106 referunt *Simeon Dunelmenſis* Monachus & *Matthæus Pariſienſis.* Talis etiam erat ardentiſſimus ille cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus lib. 1. Meteor. 6.

Uſum cometarum ad diſtantiam ſolis a terra per parallaxin eorum determinandam ſuggeſſit clar. Geom. D. *Nic. Facio.* Siquidem, ut celeberrimus D. *Hallejus* annotavit, nodi eorum orbi terræ annuo admodum ſunt vicini. Dummodo non ita prope ad oras noſtras appellant, ut obſervationes noſtras interturbent. Et certe idem *Hallejus* cometam anni 1680, Terris noſtris minatum eſſe confitetur, cum eundem *Nov.* 11. hor. 1. 6 min. *P. M.* ab orbe noſtro annuo ad Boream non amplius diſtare, quam ſemidiametro ſolari, (ſive Radio Lunaris orbitæ, uti exiſtimat) inito calculo reperiret.

FINIS.

CORRIGENDA.

TOM. I.

PAG. 1. l. 15. *post liceat esse*, lege *magnitudinem determinatam per*; pag. 11. l. 21. lege *Exemplum* 3. p. 16. l. 28. leg. $6a^2c - 3a^2d$. p. 21. l. 14. loco d c, leg. d c. l. 30. loco *ratio* c *ad* b, leg. *ratio* a *ad* b. p. 22. l. 27. leg. *si terminus antecedens consequentem*. l. 29. leg. *si antecedens in consequente*. p. 28. l. ult. leg. *quaesitum*. p. 41. l. ult. leg. *unum eundemque*. p. 44. l. 28, 29. loc. *unicam*, leg. *unciam*. p. 45. l. 4. loc. b. leg. 6. p. 48. l. ult. leg. $\frac{m \times m-1}{1 \times 2} a^{m-2} b^2$ p. 53. l. 15. leg. $\frac{m}{1} a^{m-1} e$. p. 58. l. 1. leg. *Radicis*. p. 60. l. 16. loc. b a b, leg. 6 a b. l. 17. loc. b a b c, leg. 6 a b c. l. 19. leg. $3a^2c + 6abc + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$. p. 64. loco $+6n^3$ leg. $-6n^3$, p. 69. l. 2. loc. *rationis*, l. *rationes*. p. 81. l. 28. leg. A e i C. p. 88. l. 13. loc. $a^{\prime}.\frac{1}{a}$ leg. $a^{\prime}.1\frac{1}{a}$ p. 91. l. 16. loc. x y l. x., leg. $x\dot{y}$ l. x. p. 93. l. 12. loc. $\frac{yy}{\dot{x}}$, l. $\frac{y\dot{y}}{\dot{x}}$. p. 94. l. 5. loc. $\frac{-2\dot{x}\dot{y}}{2\sqrt{aa-xx}}$ l. $\frac{-2x\dot{x}}{2\sqrt{aa-xx}}$ p. 96. l. 18. leg. *quantitas fluens*. p. 103. l. 31. loc. a c, *AC*, leg. b c, *BC*. p. 105. l. 17. loc. *BCD*, leg. *BED*. p. 117. l. 24, 25. leg. *centrum*. p. 121. l. 29. leg. *demtis duobus*. pag. 123. l. 23. loc. 6. leg. *C*. p. 124. l. 17. loc. $-xx^2\dot{x}$ leg. $-x^2\dot{x}$. p. 125. l. ult. loc. *areum*, leg. *arcum*. pag. 128. l. 22, 23. leg. *Hypothenusa*. l. penult. loc. *DE*, leg. *DC*. p. 129. l. 19. loc. *AC*, leg. *AB*. p. 131. l. 22. loc. *CD*, leg. *CB*. p. 139. l. 7. loc. *FB*, leg. *FG*. p. 143. l. 1, 2. loc. *DM*, leg. *LM*. p. 144. l. 5. loc. *LQDK*, leg. *LoDK*, & loc. *B* & *K*, leg. *b* & *K*. l. 24. loc. *Dm* leg. *Dn*. p. 148. l. 21. loc. *BO*, leg. *AB* p. 159. l. 21. loc. *HK*, leg. *AK*. p. 163. l. 4. loc. *a parametro*, lege a *parametro*. p. 164. l. 6. loc. *BO* + *OA*. leg. *BO* x *OA*. p. 168. l. 5. leg. *positione diametri ad*, &c. l. 10. leg. *partes aequales*. p. 174. l. 2. loc. *CA*, leg. *CD*. p. 176. l. penult. loc. *B*, leg. *A*. p. 180. l. 3. loc. *b b b i*, 3. leg. *2 b b i y 3*. l. 13. leg. $3cb^2l$. p. 182. l. 11. leg. *exponentes*. p. 185. l. 17. loco $= \frac{xu^2}{r}$. leg. $x = \frac{u^2}{r}$. p. 186. l. penult. loc. *anguli ipsis oppositi*, leg. *sinuum angulorum ipsis oppositorum*. p. 187. l. 28. loco *AB*, leg. *CB*.

TOM. II.

PAGE 18. l. 22. leg. *deinde recta p Q, tangens corpus p ad filum p N*, &c. p. 26. l. 19. leg. *sedecim*. p. 39. l. 20. leg. *ultimo acquisita*. p. 40. l. 23. leg. *altitudinum*. p. 58. l. 17. leg. $\frac{BCq. \times CAo.}{PCq.}$ p. 60. l. 2. leg. *applicatam*. l. 6. leg. *conjugatam*. l. ult. leg. $\frac{qr}{spq. \times qrq.}$ p. 61. l. ult. leg. *ratione duplicata temporum inverse*. p. 79. l. 19. leg. *Prop*. 19. *Cor*. 1. p. 81. loc. *agitur*, leg. *agitetur*. p. 83. l. 15. leg. *ideoque*. p. 97. l. ult. loc. $-bbdd$, leg. $-\frac{bbdd}{aa}$. p. 102. l. 14. leg. *insitam*. p. 105. leg. *venerit*. p. 120. l. 19. leg. *ad modum*. p. 124. l. 2. leg. *lumini*. p. 146. l. 15. leg. *semicirculum*. p. 147. l. 24. leg. *graduum* 8 & 31′. p. 148. l. 1. leg. *Parisiorum*. l. 27. leg. *descendunt*. p. 159. l. 14. leg. *ut & in mari*. p. 160. l. 20. leg. *propinquius*. l. ult. leg. ἀκμήν. p. 166. l. 19. loc. *mutus*, leg. *motus*. p. 173. l. 9. *refertur ad Fig*. 55. l. 17. dele *est*. p. 182. l. 14. *refertur ad Fig*. 54. p. 195. l. ult. leg. *observavit*, p. 196. l. 4. loc. *come*, leg. *coma*. p. 197. l. 6. leg. *praeripuit*. l. 14. leg. *Appiano*. p. 198. l. 2. leg. *eadem*. p. 205. l. 10. loc. *cum*, leg. *eum*.